ABAQUES

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

ABAQUES

DES

EFFORTS TRANCHANTS ET DES MOMENTS DE FLEXION

DÉVELOPPÉS

DANS LES POUTRES A UNE TRAVÉE

Par les surcharges du Règlement du 29 août 1891

SUR LES PONTS MÉTALLIQUES

PAR

MARCELIN DUPLAIX

Chef de Division à la Compagnie des Chemins de fer de l'Ouest,
Professeur à l'École Centrale,
Ingénieur adjoint à l'Ingénieur en Chef du Contrôle des Constructions métalliques
à l'Exposition Universelle de 1900.



PARIS

GEORGES CARRÉ ET C. NAUD, ÉDITEURS

3, RUE RACINE, 3

1899

ABAQUES

DES

EFFORTS TRANCHANTS ET DES MOMENTS DE FLEXION

INTRODUCTION

Depuis la mise en vigueur du règlement du 29 août 1891 sur les Ponts métalliques, lequel a substitué des trains et des convois-types aux surcharges uniformément réparties dont l'usage était général en France jusqu'à cette époque, il a été fait beaucoup de tentatives en vue de simplifier le calcul des poutres à une travée et reposant librement sur leurs appuis. Mais le degré de perfection des méthodes modernes n'a pas affranchi l'ingénieur de l'obligation de faire, dans chaque cas particulier, des calculs numériques ou des épures.

Les *abaques* que nous avons tracés, et que nous produisons aujourd'hui, suppriment complètement ce travail matériel. Ils fournissent *à vue*, *par de simples lectures*, les valeurs des plus grands efforts tranchants et des plus grands moments de flexion, dans toutes les sections de toutes les poutres jusqu'à 80 mètres de portée. On y lit aussi la composition des convois et les positions qu'ils occupent dans la travée, lorsque les efforts atteignent dans chaque section leur maximum.

L'usage de ces abaques est identique à celui des cartes

géographiques figurant le relief des terrains par des lignes de niveau ; il est donc à la portée du premier calculateur venu.

La *première partie* de cet opuscule comprend la théorie des abaques, l'exposé des propriétés géométriques et mécaniques qui ont permis d'en rendre le tracé abordable. Les indications de cette théorie permettraient d'étudier complètement un système quelconque de charges mobiles.

La *deuxième partie* est consacrée aux applications de la théorie aux surcharges réglementaires pour les ponts métalliques, à la description et à l'usage des abaques y relatifs. Cette seconde partie est traitée avec assez de détails pour pouvoir être lue et comprise, au besoin, sans le secours de la théorie qui fait l'objet de la première partie.

L'expérience que nous possédons personnellement de l'étude des ponts métalliques nous fait regarder comme bien suffisante, dans la pratique, l'approximation avec laquelle nos abaques fournissent les résultats nécessaires au calcul des tabliers. Toutefois, afin d'épuiser complètement la question, nous avons dressé des *tableaux numériques* qui, concurremment avec certaines indications générales des abaques, permettent d'écrire immédiatement, et sans aucun tâtonnement, les valeurs des coefficients entrant dans les expressions de l'effort tranchant ou du moment de flexion. Mais, même dans le cas où toute la rigueur du calcul paraîtrait nécessaire, les abaques ne seront pas inutiles, puisqu'ils pourront servir de vérification (1).

(1) Les abaques relatifs au train-type pour voies ferrées de largeur normale, ont été déjà publiés dans le *Bulletin de la Société des Ingénieurs civils de France* (février 1896). La théorie qui les accompagnait leur était un peu spéciale ; nous avons dû la généraliser en vue de son application à tout système de surcharges mobiles.

PREMIÈRE PARTIE

THÉORIE

CHAPITRE PREMIER

PRINCIPE DE LA MÉTHODE

1. — Lorsqu'une poutre droite telle que AB (fig. 1), reposant librement à ses deux extrémités sur deux appuis de niveau, donne passage à un système de charges mobiles $P_1 \ldots P_k \ldots P_q$, on sait que, pour obtenir l'effort tranchant maximum ou le moment de flexion maximum dans une section déterminée, il faut placer l'une des charges du convoi à l'aplomb de la section considérée; dans cette position, la poutre porte la totalité des charges du convoi ou seulement une partie de ces charges.

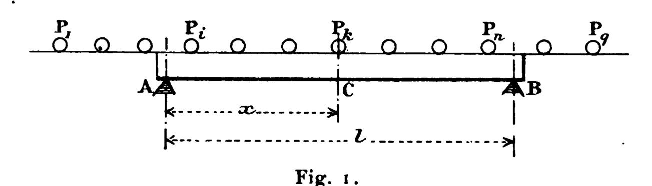


Fig. 1.

Par exemple, pour fixer les idées, le moment de flexion dans une section C sera maximum quand la charge P_k se trouvera au droit de cette section ; les charges engagées sur la poutre sont alors $P_i \ldots P_k \ldots P_n$, et elles constituent le *convoi partiel* correspondant au moment maximum en C. La charge P_k de ce convoi partiel sera dite *charge principale* pour la section C.

Or il peut arriver (et il arrive en général) que l'on ait à considérer *le même convoi partiel* $P_i \ldots P_k \ldots P_n$ et *la même charge*

principale P_k : 1° pour des sections voisines de la section C et appartenant à la même poutre AB ; — 2° pour plusieurs sections d'une série de poutres ayant des portées différentes de celle de la poutre AB. Dans ces conditions, le moment de flexion ne dépend que de la portée de la poutre et de la position de la section.

Les considérations précédentes s'appliquent aussi bien à l'effort tranchant qu'au moment de flexion ; seulement le convoi partiel et la charge principale peuvent différer.

Soient : l la portée de la poutre,
x la distance de la section à l'appui de gauche,
z l'effort tranchant ou le moment de flexion ;
on aura entre ces trois quantités une relation telle que

$$f(l, x, z) = 0. \qquad (1)$$

et dont les coefficients sont déterminés par le convoi partiel P_i... P_k... P_n et par la charge principale P_k. Ces coefficients demeurent invariables tant que le convoi partiel n'est pas modifié et que la même charge de ce convoi reste charge principale.

2. — Prenons trois axes rectangulaires ox, ol et oz (fig. 2). Il est bien évident qu'à une section donnée d'une poutre donnée correspond un point du plan $x o l$ et un seul ; c'est le point qui a pour abscisse la distance x_1 de cette section à l'appui de gauche de la poutre, et pour ordonnée la portée l_1 de la poutre. Réciproquement, à un point du même plan correspond une section bien définie d'une poutre de portée déterminée.

Imaginons maintenant que l'on construise le lieu des points dont les coordonnées satisfont à l'équation (1), on obtiendra une surface que l'on peut appeler *surface représentative* des efforts tranchants ou des moments de flexion, suivant que z désigne l'une ou l'autre de ces quantités. Une surface est complètement définie par les circonstances dans lesquelles a lieu le maximum de z, c'est-à-dire par la composition du convoi partiel et par la charge principale ; cette surface pourra être caractérisée par les trois indices *i-k-n*, si l'on convient que le convoi partiel comprend les charges P_i... P_n, et que la charge principale est P_k.

Deux surfaces représentatives distinctes diffèrent au moins par la valeur de l'un de leurs indices caractéristiques.

Si l'on considère toutes les variations possibles des indices i, k, n, on aura toutes les combinaisons de charges qui peuvent se présenter, et autant de surfaces représentatives des efforts tranchants ou fléchissants. Ces surfaces se recoupent mutuellement, et l'enveloppe comprend des portions de toutes les surfaces ou d'un certain nombre d'entre elles seulement.

Représentons la projection, sur le plan $x\,o\,l$, de la portion utile d'une surface particulière ; nous obtenons ainsi un noyau tel que ABCDEF. Pour tous les points situés à l'intérieur de ce noyau, et par conséquent pour toutes les sections représentées par ces points, le maximum de z a lieu avec la même combinaison de charges. De plus, cette combinaison peut toujours être

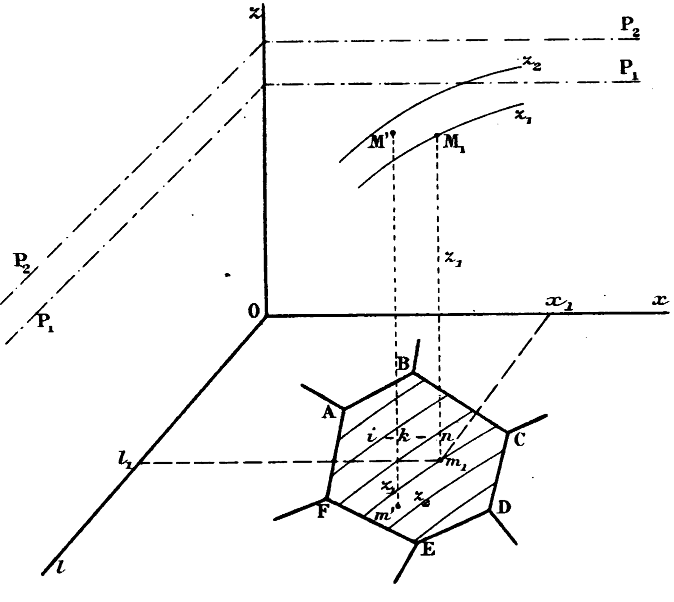


Fig. 2.

réalisée, car si elle ne l'était pas pour certains points du noyau ce serait à une autre combinaison de charges que correspondrait en ces points le maximum de z ; or, on a fait l'hypothèse que toutes les combinaisons possibles avaient été envisagées.

On retrouvera immédiatement la composition du convoi partiel et la charge principale, si l'on prend soin d'inscrire dans chaque noyau les valeurs des indices *i, k, n* qui lui sont spéciales.

3. — Considérons la surface représentative des efforts, dont la portion utile est projetée suivant le noyau ABCDEF (fig. 2), et coupons cette surface par des plans horizontaux P_1, P_2, etc., pour lesquels $z = z_1$, $z = z_2$, etc. Projetons ensuite les intersections sur le plan $x o l$; les lignes obtenues, que l'on numérotera z_1, z_2, etc., seront les *lignes de niveau* de la surface, laquelle se trouvera ainsi complètement définie.

Les lignes de niveau étant tracées, supposons que l'on veuille déterminer la valeur de l'effort tranchant ou du moment de flexion maximum, dans une section située à une distance x_1 de l'appui de gauche d'une poutre dont la portée est l_1. On cherchera d'abord, sur le plan $x o l$, le point m_1 dont les coordonnées sont x_1 et l_1. Si ce point tombe sur une ligne de niveau, la quantité cherchée (effort tranchant ou moment) aura la valeur indiquée par la cote z_1 de cette ligne.

Si la section considérée de la poutre conduisait à un point m' compris entre deux lignes de niveau z_1 et z_2, on obtiendrait la valeur z' de la quantité cherchée :

1° Approximativement, et par simple aperçu, en ayant égard à la position du point m' par rapport aux lignes z_1 et z_2 ;

2° Aussi exactement que possible, en interpolant à l'aide de la loi de variation des lignes de niveau.

On a vu que les numéros *i, k, n* du noyau, dans lequel tombe le point, permettent de déterminer la composition du convoi partiel et la charge principale. On peut donc obtenir, en définitive, en même temps que la valeur maximum de l'effort tranchant ou du moment de flexion, les circonstances qui accompagnent la production de ce maximum.

4. — En coupant la surface représentative des efforts par un plan P_1, dont l'attitude est z_1, on obtient une ligne de niveau dont l'équation se déduit de l'équation (1) en y faisant $z = z_1$, d'où :

$$f(l, x, z_1) = 0. \qquad (2)$$

Si cette équation est du premier degré en x et l, la ligne de niveau particulièrement considérée sera une ligne droite.

Si l'équation (1) est elle-même du premier degré en x et l, toutes les lignes de niveau seront des droites, et leur tracé sera abordable et pratique. Nous verrons qu'il en est ainsi pour les surfaces représentatives des efforts tranchants ; au contraire, les surfaces représentatives des moments de flexion ne jouissent pas de cette propriété.

5. — Dans le cas où l'équation (1) n'est pas linéaire en x et l, il y a tout intérêt à transformer cette équation de façon à obtenir

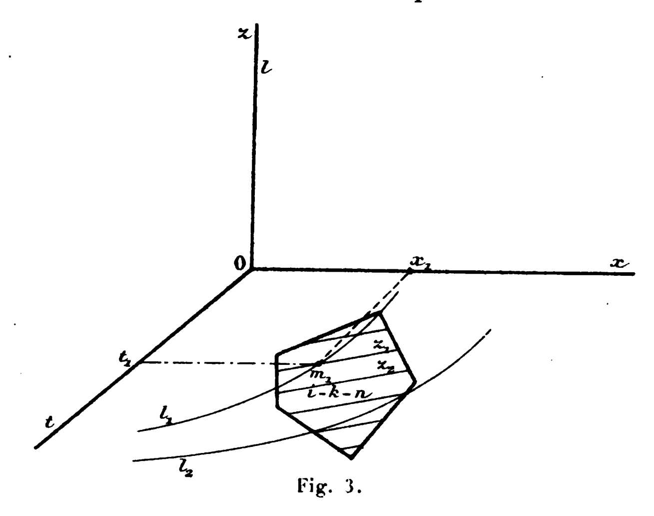


Fig. 3.

des lignes de niveau rectilignes. Voici le procédé que nous employons.

Nous prenons une variable auxiliaire t liée aux deux variables x et l par une équation telle que

(3) $$\varphi(l, x, t) = 0,$$

et nous éliminons l entre les équations (1) et (3). Nous obtenons ainsi une équation

(4) $$F(x, t, z) = 0.$$

qui définit z en fonction des deux variables x et t.

Prenons trois axes rectangulaires ox, ot et oz (fig. 3). Dans ce

système d'axes, l'équation (4) est celle d'une ***nouvelle surface représentative*** des efforts, *transformée* de la surface directe (1). Les surfaces transformées donneront lieu, comme les surfaces directes, à des noyaux qui seront caractérisés par les indices i,k,n des charges.

Les surfaces transformées admettront des lignes de niveau rectilignes, si l'équation (4) est linéaire en x et t ; nous choisissons la relation (3) de façon à obtenir ce résultat.

Étant donnée une section d'une poutre, on connaît immédiatement x_1 et l_1 ; on pourra calculer par l'équation (3) la valeur correspondante t_1, et on aura ainsi les coordonnées x_1 et t_1 du point m_1 qui représente la section. Mais un tracé complémentaire permet d'obtenir le point m_1 à l'aide des données directes x_1 et l_1.

6. — Considérons les mêmes premiers axes ox et ot, et un troisième axe ol que nous ferons coïncider avec oz. Dans ce système, l'équation (3) représentera une surface dont on pourra tracer les lignes de niveau ou *lignes d'égale portée* l_1, l_2, etc.

Le point m_1, correspondant à des valeurs données x_1 et l_1, se trouvera à l'intersection de la ligne d'égale portée l_1 et de la droite $x = x_1$. Cela suppose que l_1 est précisément la cote de l'une des lignes d'égale portée ; dans le cas contraire on devra faire une interpolation.

Lorsque le point m_1 tombe sur une ligne de niveau z_1, on a immédiatement la valeur de z ; sinon, on sera amené à faire une deuxième interpolation. Nous donnerons en temps et lieu, les règles à suivre pour ces interpolations.

L'équation (3) n'étant pas généralement linéaire en x et t, les lignes d'égale portée sont, en général, des lignes courbes. Ce tracé peut donc paraître aussi compliqué que celui des lignes de niveau courbes des surfaces (1) ; la simplification est cependant réelle. En effet, les coefficients de l'équation (1) varient avec les indices i, k, n, de sorte que les lignes de niveau ne sont continues que dans un noyau ; dans le cas où ces lignes sont courbes, leur tracé à l'intérieur de tous les noyaux serait extrêmement long et pénible. Les coefficients de l'équation (3), au contraire, sont indépendants des charges, et les lignes d'égale portée sont des lignes continues dans tout le plan.

CHAPITRE II

EXPRESSIONS GÉNÉRALES DES EFFORTS TRANCHANTS ET DES MOMENTS DE FLEXION. CALCUL DES COEFFICIENTS DES ÉQUATIONS.

§ I. — EXPRESSIONS GÉNÉRALES DES EFFORTS TRANCHANTS ET DES MOMENTS DE FLEXION

7. — Considérons une poutre AB dont la portée est l (fig. 4), et dans cette poutre une section particulière C située à une distance x de l'appui de gauche. Le convoi partiel engagé sur la poutre est formé des charges P_i... P_n, et la charge P_k est charge

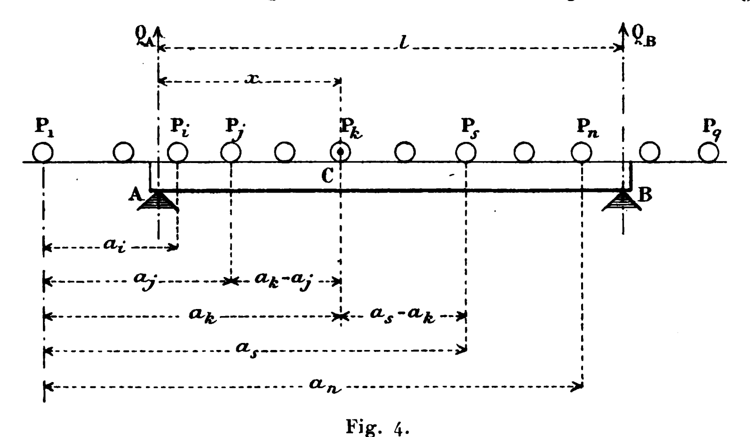


Fig. 4.

principale, c'est-à-dire qu'elle doit être placée à l'aplomb de la section C pour que la position du convoi corresponde au maximum de l'effort tranchant ou du moment de flexion dans cette section.

Pour fixer les positions relatives des charges du convoi, nous désignerons en général par a_j la distance d'une charge quel-

conque P_j à la charge de tête P_1, de telle sorte que $a_1 = 0$. Les distances a sont indépendantes de la position du convoi par rapport à la poutre.

Nous nous proposons de déterminer, en fonction des éléments constitutifs du convoi partiel $P_i \ldots P_k \ldots P_n$, les expressions de l'effort tranchant et du moment de flexion dans la section C, c'est-à-dire de préciser la forme de l'équation (1).

Les coefficients de cette équation dépendent des indices i, k, n des charges, et, au lieu de continuer à représenter les efforts par la lettre z qui entre dans l'équation indéterminée (1), nous désignerons respectivement les efforts tranchants et les moments de flexion par les symboles ${}_i\overset{k}{T}_n$ et ${}_i\overset{k}{M}_n$, en mettant en évidence les indices qui précisent la position des charges.

8. ***Efforts tranchants.*** — Soient : P_j une charge quelconque comprise entre A et C, et P_s une charge quelconque située entre la section C et l'autre extrémité B de la poutre. La valeur absolue de la réaction Q_A de l'appui de gauche A est

$$Q_A = \frac{1}{l}\sum_{j=i}^{j=k-1} P_j[l - x + (a_k - a_j)] + \frac{1}{l}\sum_{s=k}^{s=n} P_s[l - x - (a_s - a_k)],$$

d'où pour l'effort tranchant dans la section C, et immédiatement à gauche du point d'application de la charge principale P_k,

$$\begin{aligned} {}_i\overset{k}{T}_n &= Q_A - \sum_{j=i}^{j=k-1} P_j \\ &= -\frac{1}{l}\sum_{j=i}^{j=k-1} P_j[x - (a_k - a_j)] + \frac{1}{l}\sum_{s=k}^{s=n} P_s[l - x - (a_s - a_k)], \end{aligned}$$

relation que l'on peut écrire.

$$(5)\quad {}_i\overset{k}{T}_n = -\frac{x}{l}\sum_{j=i}^{j=k-1} P_j + \frac{l-x}{l}\sum_{s=k}^{s=n} P_s + \frac{1}{l}\sum_{j=i}^{j=k-1} P_j(a_k - a_j) - \frac{1}{l}\sum_{s=k+1}^{s=n} P_s(a_s - a_k).$$

Telle est l'expression que nous adopterons pour l'effort tranchant.

Dans le cas particulier et très fréquent où la charge principale P_k se confond avec la charge extrême P_i du convoi partiel, on a

$$\sum_{j=i}^{j=k-1} P_j = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=i}^{j=k-1} P_j (a_k - a_j) = 0.$$

et l'expression (5) de l'effort tranchant se réduit à la suivante :

$$(5') \qquad {}_k\overset{k}{T}_n = \frac{l-x}{l} \sum_{s=k}^{s=n} P_s - \frac{1}{l} \sum_{s=k+1}^{s=n} P_s (a_s - a_k).$$

9. ***Moments de flexion.*** — Le moment de flexion dans la section C, pour la même position des charges, a pour valeur

$${}_i\overset{k}{M}_n = Q_A x - \sum_{j=i}^{j=k-1} P_j (a_k - a_j).$$

ou, en utilisant l'expression trouvée au numéro précédent pour la réaction Q_A,

$${}_i\overset{k}{M}_n = \frac{x}{l} \sum_{j=k}^{j=k-1} P_j [l - x + (a_k - a_j)] + \frac{x}{l} \sum_{s=k}^{s=n} P_s [l - x - (a_s - a_k)] - \sum_{j=i}^{j=k-1} P_j (a_k - a_j).$$

Cette relation peut encore s'écrire de la façon suivante :

$${}_i\overset{k}{M}_n = \frac{x(l-x)}{l} \left[\sum_{j=i}^{j=k-1} P_j + \sum_{s=k}^{s=n} P_s \right] - \frac{l-x}{l} \sum_{j=i}^{j=k-1} P_j (a_k - a_j) - \frac{x}{l} \sum_{s=k}^{s=n} P_s (a_s - a_k),$$

ou enfin

$$(6)\qquad {}_i\overset{k}{M}_n = \frac{x(l-x)}{l}\sum_{j=i}^{j=n} P_j - \frac{l-x}{l}\sum_{j=i}^{j=k-1} P_j\,(a_k - a_j)$$
$$- \frac{x}{l}\sum_{s=k+1}^{s=n} P_s\,(a_s - a_k).$$

Telle sera l'expression définitive du moment de flexion.

10. ***Constantes du convoi partiel.*** — Les coefficients des expressions (5) et (6) de l'effort tranchant et du moment de flexion dépendent exclusivement du convoi partiel $P_i \ldots P_k \ldots P_n$ engagé sur la poutre, et ils ont chacun une signification mécanique particulière.

1° Les coefficients

$$\sum_{=i}^{j=k-1} P_j \qquad \sum_{s=k}^{s=n} P_s \qquad \sum_{j=i}^{j=n} P_j$$

représentent la somme d'un certain nombre de charges du convoi partiel. Pour abréger l'écriture, nous désignerons une pareille somme par la lettre A munie des indices convenables, et nous écrirons

$$(7)\qquad \begin{cases} {}_iA_{k-1} = \sum\limits_{j=i}^{j=k-1} P_j = P_i + \ldots + P_{k-1} \\ {}_kA_n = \sum\limits_{s=k}^{s=n} P_s = P_k + \ldots + P_n \\ {}_iA_n = \sum\limits_{j=i}^{j=n} P_j = P_i + \ldots + P_k + \ldots + P_n. \end{cases}$$

2° Le coefficient

$$\sum_{s=k+1}^{s=n} P_s\,(a_s - a_k)$$

est égal à la valeur absolue de la somme des moments, par rapport à la charge principale P_k, des charges du convoi partiel situées à droite de cette charge principale. Cette somme de moments sera désignée par la lettre B, et nous poserons

$$(8)\quad \overset{k}{B}_n = \sum_{s=k+1}^{s=n} P_s(a_s - a_k) = P_{k+1}(a_{k+1} - a_k) + \ldots + P_n(a_n - a_k).$$

3° Enfin, le coefficient

$$\sum_{j=i}^{j=k+1} P_j\,(a_k - a_j)$$

est, en valeur absolue, la somme des moments, par rapport à la charge principale P_k, des charges du convoi partiel situées à gauche de cette charge principale. Nous représenterons cette somme par la lettre C, et nous écrirons

$$(9)\quad {}_i\overset{k}{C} = \sum_{j=i}^{j=k-1} P_j(a_k - a_j) = P_i(a_k - a_i) + \ldots + P_{k-1}(a_k - a_{k-1}).$$

En conséquence, les expressions (5), (5′) de l'effort tranchant pourront s'écrire, en fonction des constantes A, B, C du convoi partiel :

$$(10)\quad {}_i\overset{k}{T}_n = -{}_iA_{k-1}\frac{x}{l} + {}_kA_n\frac{l-x}{l} - \frac{\overset{k}{B}_n - {}_i\overset{k}{C}}{l}$$

$$= -{}_iA_{k-1} + {}_iA_n\frac{l-x}{l} - \frac{\overset{k}{B}_n - {}_i\overset{k}{C}}{l}$$

$$(11)\quad \overset{k}{T}_n = {}_kA_n\frac{l-x}{l} - \frac{\overset{k}{B}_n}{l}$$

De même, l'expression (6) du moment de flexion se transforme en la suivante :

$$(12)\quad {}_i\overset{k}{M}_n = {}_iA_n\frac{x(l-x)}{l} - \overset{k}{B}_n\frac{x}{l} - {}_i\overset{k}{C}\,\frac{l-x}{l}.$$

§ 2. — CONSTANTES GÉNÉRALES DU CONVOI TOTAL

11. — Les constantes A, B, C d'un convoi partiel déterminé $P_i \ldots\ldots P_k \ldots\ldots P_n$ peuvent se calculer directement sans aucune difficulté; mais on les obtiendra plus rapidement si l'on a soin de dresser au préalable un tableau des valeurs de certaines quantités de même nature, et relatives au convoi total dont fait partie le convoi partiel.

Supposons que le convoi total comprenne les charges P_1, $P_2 \ldots$ $P_j \ldots$ $P_n \ldots$ P_q (fig. 5); ainsi que nous l'avons déjà dit (7), une charge quelconque P_j est repérée par sa distance a_j à la charge de tête P_1.

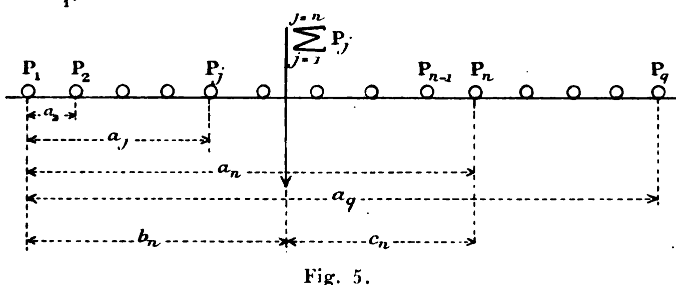


Fig. 5.

Considérons les n premières charges $P_1 \ldots$ $P_j \ldots$ P_n du convoi total, n prenant successivement les valeurs 1, 2, 3,...q. Pour chaque valeur particulière de n, on peut calculer :

1° La somme des intensités des charges $P_1 \ldots$ $P_j \ldots$ P_n, c'est-à-dire d'après la notation adoptée (10),

$$(13) \qquad {}_1A_n = \sum_{j=1}^{j=n} P_j .$$

2° La somme, en valeur absolue, des moments des mêmes charges par rapport au point d'application de la charge de tête P_1, ou

$$(14) \qquad \overset{1}{B}_n = \sum_{j=2}^{j=n} P_j a_j$$

puisque l'on a $a_1 = 0$

3° La somme, en valeur absolue, des moments des charges $P_1 \dots P_j \dots P_n$ par rapport au point d'application de la charge P_n, c'est-à-dire

(15) $$ {}_1\overset{n}{C} = \sum_{j=1}^{j=n-1} P_j (a_n - a_j). $$

Enfin il peut être intéressant de connaître la position de la résultante des charges considérées, ou la verticale du centre de gravité des charges $P_1 \dots P_j \dots P_n$. En désignant par b_n sa distance à la charge P_1, et par c_n sa distance à la charge P_n, on a

(16) $$ \left\{ \begin{aligned} b_n &= \frac{\sum\limits_{j=2}^{j=n} P_j a_j}{\sum\limits_{j=1}^{j=n} P_j} = \frac{\overset{1}{B}_n}{{}_1A_n} \\ c_n &= \frac{\sum\limits_{j=1}^{j=n-1} P_j (a_n - a_j)}{\sum\limits_{j=1}^{j=n} P_j} = \frac{{}_1\overset{n}{C}}{{}_1A_n} \end{aligned} \right. $$

avec la condition

(17) $$ b_n + c_n = a_n. $$

Les quantités ${}_1A_n$, $\overset{1}{B}_n$, ${}_1\overset{n}{C}$, b_n et c_n sont les constantes générales du convoi total, et il faut les calculer pour toutes les valeurs de n.

12. ***Calcul des constantes générales.*** — Pour calculer rapidement la série des constantes générales A, B et C du convoi total, il est commode de pouvoir déduire un résultat quelconque du résultat précédement obtenu, c'est-à-dire de déterminer ${}_1A_{n+1}$, $\overset{1}{B}_{n+1}$ et ${}_1\overset{n+1}{C}$ à l'aide de ${}_1A_n$, $\overset{1}{B}_n$ et ${}_1\overset{n}{C}$.

1° On a d'abord évidemment

$$(18)\qquad {}_1A_{n+1} = {}_1A_n + P_{n+1}.$$

2° En ce qui concerne les moments B, la formule (14) donne

$$\overset{1}{B}_{n+1} = \sum_{j=2}^{j=n+1} P_j a_j$$

$$= \sum_{j=2}^{j=n} P_j a_j + P_{n+1}\, a_{n+1}$$

ou bien

$$(19)\qquad \overset{1}{B}_{n+1} = \overset{1}{B}_n + P_{n+1}\, a_{n+1}.$$

3° De même, pour le calcul des moments C, on a par la formule (15)

$${}_1\overset{n+1}{C} = \sum_{j=1}^{j=n} P_j\,(a_{n+1} - a_j)$$

ou

$${}_1\overset{n+1}{C} = \sum_{j=1}^{j=n} P_j\,[(a_n - a_j) + (a_{n+1} - a_n)]$$

$$= \sum_{j=1}^{j=n} P_j\,(a_n - a_j) + \sum_{j=1}^{j=n} P_j\,(a_{n+1} - a_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{j=n-1} P_j\,(a_n - a_j) + (a_{n+1} - a_n) \sum_{j=1}^{j=n} P_j$$

c'est-à-dire

$$(20)\qquad {}_1\overset{n+1}{C} = {}_1\overset{n}{C} + {}_1A_n\,(a_{n+1} - a_n).$$

Le tableau des résultats du calcul pourra être disposé comme ci-contre.

ÉLÉMENTS DU CONVOI				CONSTANTES GÉNÉRALES DU CONVOI				
				SOMMES des intensités des charges	SOMMES des montants des charges par rapport		DISTANCES du centre de gravité	
NUMÉROS des charges n	INTENSITÉS des charges P_n	DISTANCES à la charge P_1 a_n	ESPACEMENTS des charges $a_n - a_{n-1}$	${}_1A_n$	à la charge P_1 $\overset{1}{B}_n$	à la charge P_n ${}_1\overset{n}{C}$	à la charge P_1 b_n	à la charge P_n c_n
1	P_1	$a_1 = 0$		${}_1A_1 = P_1$	$\overset{1}{B}_1 = 0$	${}_1\overset{1}{C} = 0$	$b_1 = 0$	$c_1 = 0$
2	P_2	a_2	$a_2 - a_1$	${}_1A_2 = {}_1A_1 + P_2$	$\overset{1}{B}_2 = \overset{1}{B}_1 + P_2 a_2$	${}_1\overset{2}{C} = {}_1\overset{1}{C} + {}_1A_1(a_2 - a_1)$	$b_2 = \frac{\overset{1}{B}_2}{{}_1A_2}$	$c_2 = \frac{{}_1\overset{2}{C}}{{}_1A_2}$
3	P_3	a_3	$a_3 - a_2$	${}_1A_3 = {}_1A_2 + P_3$	$\overset{1}{B}_3 = \overset{1}{B}_2 + P_3 a_3$	${}_1\overset{3}{C} = {}_1\overset{2}{C} + {}_1A_2(a_3 - a_2)$		
4	P_4	a_4	$a_4 - a_3$	${}_1A_4 = {}_1A_3 + P_4$	$\overset{1}{B}_4 = \overset{1}{B}_3 + P_4 a_4$	${}_1\overset{4}{C} = {}_1\overset{3}{C} + {}_1A_3(a_4 - a_3)$		
......	......	......	......	......	......	......	......	......
q-1	P_{q-1}	a_{q-1}						
q	P_q	a_q	$a_q - a_{q-1}$	${}_1A_q = {}_1A_{q-1} + P_q$	$\overset{1}{B}_1 = \overset{1}{B}_{q-1} + P_q a_q$	${}_1\overset{q}{C} = {}_1\overset{q-1}{C} + {}_1A_{q-1}(a_q - a_{q-1})$	$b_q = \frac{\overset{1}{B}_q}{{}_1A_q}$	$c_q = \frac{{}_1\overset{q}{C}}{{}_1A_q}$

Les calculs numériques des moments B et C sont susceptibles d'une vérification. En effet, en ajoutant membre à membre les relations (14) et (15), on a

$$\overset{1}{B}_n + {}_1\overset{n}{C} = \sum_{j=2}^{j=n} P_j a_j + \sum_{j=1}^{j=n-1} P_j (a_n - a_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{j=n} P_j a_j + \sum_{j=1}^{j=n} P_j (a_n - a_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{j=n} P_j a_n = a_n \sum_{j=1}^{j=n} P_j$$

ou

(21) $$\overset{1}{B}_n + {}_1\overset{n}{C} = {}_1A_n a_n.$$

De même le calcul numérique des distances b_n et c_n peut être vérifié par la relation (17)

$$b_n + c_n = a_n.$$

§ 3. — CALCUL DES CONSTANTES DES CONVOIS PARTIELS

13. — Les constantes générales du convoi total étant déterminées, voici comment l'on pourra calculer les constantes ${}_iA_n$, $\overset{k}{B}_n$ et ${}_i\overset{k}{C}$ d'un convoi partiel quelconque $P_i \ldots$, $P_k \ldots$, P_n.

1° On a d'abord évidemment

(22) $${}_iA_n = {}_1A_n - {}_1A_{i-1}.$$

2° L'expression du moment $\overset{k}{B}_n$ est donnée par l'équation (8) du n° **10** :

$$\overset{k}{B}_n = \sum_{s=k+1}^{s=n} P_s (a_s - a_k)$$

et on peut l'écrire

$$\overset{k}{B}_n = \sum_{s=1}^{s=n} P_s (a_s - a_k) + \sum_{s=1}^{s=k} P_s (a_k - a_s)$$

$$= \sum_{s=1}^{s=n} P_s a_s - a_k \sum_{s=1}^{s=n} P_s + \sum_{s=1}^{s=k} P_s (a_k - a_s).$$

Or, en vertu des équations (13), (14) et (15), on a

$$\sum_{s=1}^{s=n} P_s a_s = \sum_{s=2}^{s=n} P_s a_s = \overset{1}{B}_n$$

$$\sum_{s=1}^{s=n} P_s = {}_1A_n$$

$$\sum_{s=1}^{s=k} P_s (a_k - a_s) = \sum_{s=1}^{s=k-1} P_s (a_k - a_s) = {}_1\overset{k}{C}$$

d'où l'expression suivante :

$$\overset{k}{B}_n = \overset{1}{B}_n + {}_1\overset{k}{C} - {}_1A_n a_k. \tag{23}$$

3° L'équation (9) donne l'expression du moment ${}_i\overset{k}{C}$, c'est-à dire

$${}_i\overset{k}{C} = \sum_{j=i}^{j=k-1} P_j (a_k - a_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{=k-1} P_j (a_k - a_j) - \sum_{j=1}^{j=i-1} P_j (a_k - a_j)$$

$$= \sum_{j=2}^{j=i-1} P_j a_j + \sum_{j=1}^{j=k-1} P_j (a_k - a_j) - a_k \sum_{j=1}^{j=i-} P$$

ou bien, en fonction des constantes générales

$${}_i\overset{k}{C} = \overset{1}{B}_{i-1} + {}_1\overset{k}{C} - {}_1A_{i-1}\, a_k \tag{24}$$

14. — Les formules (22), (23) et (24) serviront à calculer les constantes A, B, C des convois partiels à l'aide des constantes générales du convoi total. Les calculs pourront être vérifiés par de nouvelles relations que nous allons établir et qui font connaître

$$ {}_{i+1}A_n, \quad \overset{k+1}{B}_n, \quad {}_{j+1}\overset{k}{C}, \quad {}_iA_{n+1}, \quad \overset{k}{B}_{n+1}, \quad {}_i\overset{k+1}{C} $$

dès que l'on a déterminé

$$ {}_iA_n, \quad \overset{k}{B}_n \quad \text{et} \quad {}_i\overset{k}{C} $$

1° En ce qui concerne les coefficients A, les relations s'obtiennent immédiatement. On a en effet

$$ {}_{i+1}A_n = {}_iA_n - P_i \tag{25} $$

$$ {}_iA_{n+1} = {}_iA_n + P_{n+1}. \tag{26} $$

2° La formule (23) nous donne successivement, en modifiant convenablement les indices,

$$ \overset{k}{B}_n = \overset{1}{B}_n + {}_1\overset{k}{C} - {}_1A_n a_k $$

$$ \overset{k+1}{B}_n = \overset{1}{B}_n + {}_1\overset{k+1}{C} - {}_1A_n a_{k+1} $$

$$ \overset{k}{B}_{n+1} = \overset{1}{B}_{n+1} + {}_1\overset{k}{C} - {}_1A_{n+1} a_k $$

d'où

$$ \overset{k+1}{B}_n - \overset{k}{B}_n = {}_1\overset{k+1}{C} - {}_1\overset{k}{C} - {}_1A_n\,(a_{k+1} - a_k) $$

$$ \overset{k}{B}_{n+1} - \overset{k}{B}_n = \overset{1}{B}_{n+1} - \overset{1}{B}_n - ({}_1A_{n+1} - {}_1A_n)\, a_k. $$

Mais les relations (18), (19) et (20) permettent d'écrire

$$ {}_1A_{n+1} - {}_1A_n = P_{n+1} $$

$$ \overset{1}{B}_{n+1} - \overset{1}{B}_n = P_{n+1}\, a_{n+1} $$

$$ {}_1\overset{k+1}{C} - {}_1\overset{k}{C} = {}_1A_k\,(a_{k+1} - a_k). $$

On a donc finalement

$$ \overset{k+1}{B}_n = \overset{k}{B}_n - {}_{k+1}A_n\,(a_{k+1} - a_k) \tag{27} $$

$$\overset{k}{B}_{n+1} = \overset{k}{B}_n + P_{n+1}(a_{n+1} - a_k). \tag{28}$$

3° Opérons de même en ce qui concerne les moments C ; nous aurons d'abord

$$
\begin{aligned}
{}_i\overset{k}{C} &= \overset{1}{B}_{i-1} + {}_1\overset{k}{C} - {}_1A_{i-1}\,a_k \\
{}_{i+1}\overset{k}{C} &= \overset{1}{B}_i + {}_1\overset{k}{C} - {}_1A_i\,a_k \\
{}_i\overset{k+1}{C} &= \overset{1}{B}_{i-1} + {}_1\overset{k+1}{C} - {}_1A_{i-1}\,a_{k+1}
\end{aligned}
$$

puis

$$
\begin{aligned}
{}_{i+1}\overset{k}{C} - {}_i\overset{k}{C} &= \overset{1}{B}_i - \overset{1}{B}_{i-1} - ({}_1A_i - {}_1A_{i-1})\,a_k \\
{}_i\overset{k+1}{C} - {}_i\overset{k}{C} &= {}_1\overset{k+1}{C} - {}_1\overset{k}{C} - {}_1A_{i-1}(a_{k+1} - a_k)
\end{aligned}
$$

et après transformations

$${}_{i+1}\overset{k}{C} = {}_i\overset{k}{C} - P_i\,(a_k - a_i) \tag{29}$$

$${}_i\overset{k+1}{C} = {}_i\overset{k}{C} + {}_iA_k\,(a_{k+1} - a_k). \tag{30}$$

CHAPITRE III

EFFORTS TRANCHANTS

§ I. — DISPOSITION GÉNÉRALE ADOPTÉE POUR L'ÉPURE

15. — Considérons un convoi partiel $P_i \dots P_k \dots P_n$ chargeant une poutre de portée l, la charge principale P_k étant à une distance x de l'appui de gauche (fig. 6). Nous savons (**8** et **10**) que

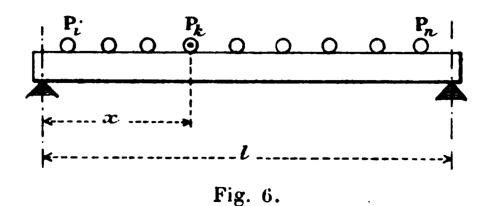


Fig. 6.

dans ce cas l'effort tranchant sous la charge P_k, immédiatement à gauche du point d'application de cette charge, est donné par la formule (10) :

$$ {}_i\overset{k}{T}_n\, l = -\,{}_iA_{k-1} + {}_iA_n\,\frac{l-x}{l} - \frac{\overset{k}{B}_n - {}_i\overset{k}{C}}{l} $$

que l'on peut écrire

$$ {}_i\overset{k}{T}_n\, l = -\,{}_iA_{k-1}\, l + {}_iA_n(l-x) - \left(\overset{k}{B}_n - {}_i\overset{k}{C}\right). $$

Cette équation est celle de la surface représentative des efforts tranchants, les trois variables étant ${}_i\overset{k}{T}_n$, x et l. Elle est du premier degré en x et l; par conséquent (**4**), les lignes de niveau des efforts tranchants seraient des lignes droites.

Mais, d'après le règlement du 29 août 1891 sur les ponts

métalliques, les convois peuvent circuler dans les deux sens, au moins pendant les épreuves des ouvrages ; il en résulte que l'effort tranchant aura les mêmes valeurs absolues dans deux sections disposées symétriquement par rapport au milieu de la portée. Il suffit donc d'obtenir les efforts tranchants dans la moitié de la travée, c'est-à-dire de faire varier x de o à $\frac{l}{2}$.

Nous poserons

$$(31) \qquad y = \frac{l}{2}$$

et l'équation de la surface devient

$$(32) \qquad 2y\left({}_{i}\overset{k}{T}_{n} + {}_{i}A_{k-1}\right) = {}_{i}A_{n}\,(2y - x) - \left(\overset{k}{B}_{n} - {}_{i}\overset{k}{C}\right)$$

en fonction des trois variables ${}_{i}\overset{k}{T}_{n}$, x et y.

16. — C'est sur le plan des $x\,y$ que l'on doit représenter, par la projection de leurs lignes de niveau, les surfaces représentatives des efforts tranchants. Prenons donc (fig. 7) deux axes rectangulaires $o\,x$ et $o\,y$. Puisque x doit varier seulement de zéro à y, toute la partie utile de l'épure sera comprise entre l'axe oy ($x = o$) et la bissectrice des deux axes ($x = y$).

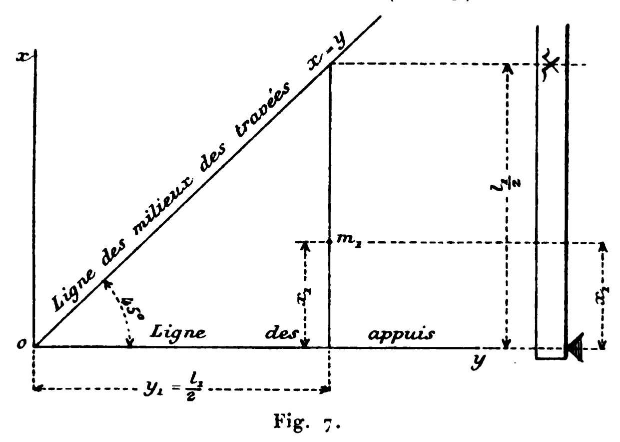


Fig. 7.

Il est très facile de trouver sur le plan la position du point m_1 qui représente une section particulière de la première moitié

d'une poutre déterminée. Les données directes sont : la portée l_1 de la poutre, et la distance x_1 de la section à l'appui de gauche. Le point m_1 cherché aura pour coordonnées x_1 et $y_1 = \frac{l_1}{2}$.

Tous les points représentatifs des différentes sections d'une même poutre de portée l_1 ont même ordonnée y_1 ; ils sont donc distribués sur une droite parallèle à l'axe ox. Donc les lignes d'égale portée sont des parallèles à cet axe.

L'axe oy est le lieu des points représentant les appuis des poutres ; nous l'appellerons *ligne des appuis*.

De même, la bissectrice des axes sera la *ligne des milieux des travées*, parce que tout le long de cette ligne on a

$$x = y = \frac{l}{2}.$$

§ 2. — INTERSECTIONS DES SURFACES REPRÉSENTATIVES

17. ***Cas où la charge principale P_k est invariable.*** — Avant d'aborder le cas général, nous allons chercher les projections des intersections des surfaces pour lesquelles l'indice k de la charge principale est le même; pour cela nous ferons varier successivement les indices i et n des charges extrêmes.

1° *Intersection des surfaces* ${}_i\overset{k}{T}_n$ *et* ${}_{i+1}\overset{k}{T}_n$. — Appliquons la formule (32) aux deux convois partiels $P_i \ldots P_k \ldots P_n$ et $P_{i+1} \ldots P_k \ldots P_n$, nous aurons les deux équations :

$$2y\left({}_i\overset{k}{T}_n + {}_iA_{k-1}\right) = {}_iA_n(2y - x) - \overset{k}{B}_n + {}_i\overset{k}{C}$$

$$2y\left({}_{i+1}\overset{k}{T}_n + {}_{+1}A_{k-1}\right) = {}_{i+1}A_n(2y - x) - \overset{k}{B}_n + {}_{i+1}\overset{k}{C}.$$

En faisant ${}_i\overset{k}{T}_n = {}_{i+1}\overset{k}{T}_n$ et en retranchant membre à membre les deux équations précédentes, nous obtenons l'équation de la projection de l'intersection des deux surfaces considérées:

$$2y({}_iA_{k-1} - {}_{+1}A_{k-1}) = ({}_iA_n - {}_{+1}A_n)(2y - x) + \left({}_i\overset{k}{C} - {}_{i+1}\overset{k}{C}\right).$$

Or, d'après les relations (25) et (29) on a

$$ {}_{i}A_{k-1} - {}_{i+1}A_{k-1} = P_{i} $$
$$ {}_{i}A_{n} - {}_{i+1}A_{n} = P_{i} $$
$$ {}_{i}\overset{k}{C} - {}_{i+1}\overset{k}{C} = P_{i}(a_{k} - a_{i}), $$

et l'équation de l'intersection se réduit à

$$ 2yP_{i} = P_{i}(2y - x) + P_{i}(a_{k} - a_{i}) $$

ou

$$ (33) \qquad x = a_{k} - a_{i} $$

équation d'une parallèle à l'axe des y. Sa position est indépendante de la valeur de l'indice de la charge extrême P_{n}; donc, quel que soit le nombre des charges situées à droite de la charge principale P_{k}, cette droite est invariable.

2° *Intersection des surfaces* ${}_{i}\overset{k}{T}_{n}$ *et* ${}_{i}\overset{k}{T}_{n+1}$. — Les équations des deux surfaces sont ici :

$$ 2y\left({}_{i}\overset{k}{T}_{n} + {}_{i}A_{k-1}\right) = {}_{i}A_{n}(2y - x) - \overset{k}{B}_{n} + {}_{i}\overset{k}{C} $$
$$ 2y\left({}_{i}\overset{k}{T}_{n+1} + {}_{i}A_{k-1}\right) = {}_{i}A_{n+1}(2y - x) - \overset{k}{B}_{n+1} + {}_{i}\overset{k}{C} $$

d'où pour la projection de l'intersection

$$ 0 = ({}_{i}A_{n+1} - {}_{i}A_{n})(2y - x) - \left(\overset{k}{B}_{n+1} - \overset{k}{B}_{n}\right). $$

Mais, d'après les relations (26) et (28), on a

$$ {}_{i}A_{n+1} - {}_{i}A_{n} = P_{n+1} $$
$$ \overset{k}{B}_{n+1} - \overset{k}{B}_{n} = P_{n+1}(a_{n+1} - a_{k}), $$

ce qui permet d'écrire comme il suit la projection de l'intersection des deux surfaces :

$$ (34) \qquad x = 2y - (a_{n+1} - a_{k}). $$

C'est l'équation d'une droite, constante quel que soit l'indice de la charge P_i. Cette droite est parallèle à la direction fixe $x = 2y$; elle coupe l'axe oy en un point situé à une distance $\frac{a_{n+1} - a_k}{2}$ de l'origine des axes; elle coupe l'axe ox à une distance $-(a_{n+1} - a_k)$ de la même origine; enfin, son point d'intersection avec la droite $x = y$ a pour coordonnées $x = y = a_{n+1} - a_k$.

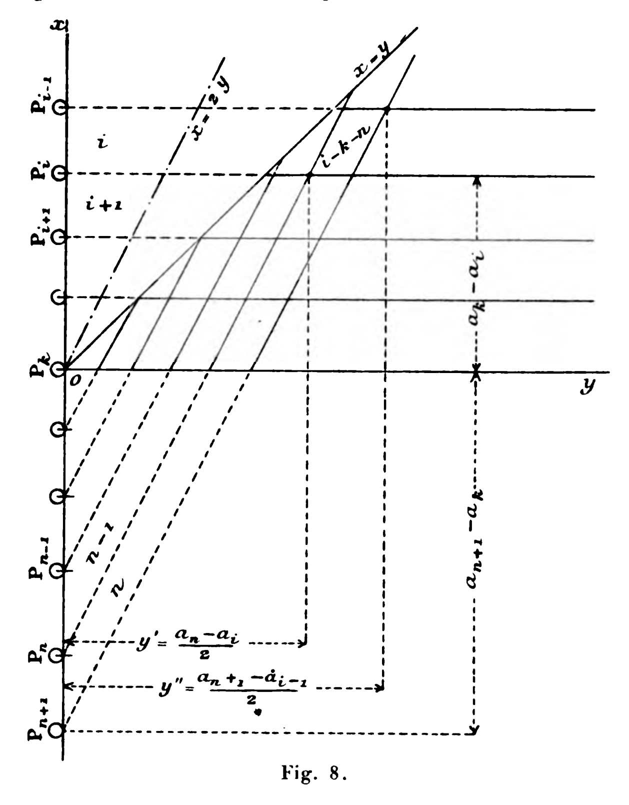


Fig. 8.

L'épure étant préparée comme il a été dit (16), plaçons le convoi sur l'axe ox, le point d'application de la charge P_k coïncidant avec l'origine des axes, les charges $P_{k-1} \ldots P_i \ldots$ du côté des x positifs, et les charges $P_{k+1} \ldots P_n \ldots$ du côté des x négatifs (fig. 8).

Le convoi occupant cette position, la formule (33) montre que l'horizontale du point d'application de la charge P_i est l'intersection des surfaces ${}_i\overset{k}{T}_n$ et ${}_{i+1}\overset{k}{T}_n$ quel que soit n.

De même, les droites définies par l'équation (34), et qui sont les intersections des surfaces ${}_{i}\overset{k}{T}_{n}$ et ${}_{i}\overset{n}{T}_{n+1}$' s'obtiennent en menant par les points d'application des charges P_{n+1} des parallèles à la direction fixe $x = 2y$. Ces droites peuvent encore se tracer en marquant leurs points d'intersection axec l'axe oy et avec la droite $x = 2y$; nous avons donné plus haut la position de ces points particuliers.

18. — Le tracé de l'épure précédente (fig. 8), qui délimite les régions d'influence des convois partiels qui ont tous P_k pour charge principale, est indépendant des intensités des charges; il suffit de connaître leurs espacements. On peut s'en rendre compte directement.

1° L'intersection des surfaces ${}_{i}\overset{k}{T}_{n}$ et ${}_{i+1}\overset{k}{T}_{n}$ correspond à des valeurs de x et de y telles que la charge P_i commence à s'engager

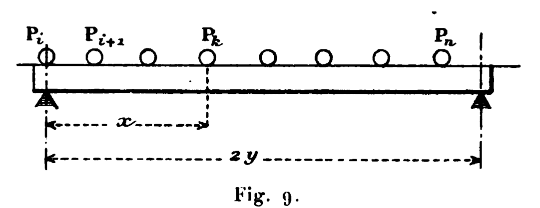


Fig. 9.

dans la travée, comme cela est représenté dans la figure 9. On reconnaît alors que la position des charges satisfait bien à la relation (33)

$$x = a_k - a_i$$

quel que soit l'indice n de la charge extrême de droite, et quelles que soient les intensités de toutes les charges du convoi.

2° De même, l'intersection des surfaces ${}_{i}\overset{k}{T}_{n}$ et ${}_{i}\overset{k}{T}_{n+1}$ a lieu lorsque la charge P_{n+1} est sur l'appui de droite (fig. 10). Dans cette position des charges, on a entre x et y la relation

$$2y - x = a_{n+1} - a_k$$

identique à l'équation (34), et indépendante comme elle de l'in-

dice i de la charge extrême de gauche et des intensités des charges.

3° Les portées limites l' et l'', entre lesquelles la combinaison

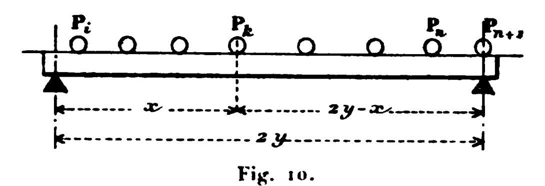


Fig. 10.

de charges $P_i \dots P_k \dots P_n$ est réalisable, sont d'après ce qui précède,

$$l' = a_n - a_i \qquad \text{et} \qquad l'' = a_{n+1} - a_{i-1}$$

les valeurs correspondantes de y étant

$$y' = \frac{a_n - a_i}{2} \qquad \text{et} \qquad y'' = \frac{a_{n+1} - a_{i-1}}{2}$$

ainsi qu'on peut d'ailleurs le reconnaître sur l'épure de la figure 8.

19. ***Cas où le convoi est retourné.*** — L'épure de la figure 8 suppose que le convoi $P_i \dots P_k \dots P_n$ est orienté de telle façon que les charges $P_i \dots P_k$ soient dans la moitié de gauche de la poutre. Ainsi que nous l'avons fait observer (15), il convient aussi d'étudier le cas où cette même moitié de poutre contiendrait les char-

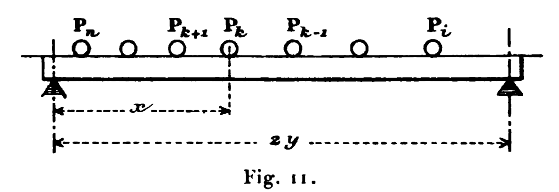


Fig. 11.

ges $P_n \dots P_k$, le convoi étant retourné bout pour bout (fig. 11). D'après nos conventions (7), l'effort tranchant correspondant à cette position des charges sera représenté par le symbole ${}_n\overset{k}{T}_i$, et l'on aura son expression en permutant entre eux, dans la formule (32), les indices i et n, et en y remplacant $k - 1$ par $k + 1$; on obtient de cette façon la formule suivante :

$$2y\left({}_n\overset{k}{T}_i + {}_nA_{k+1}\right) = {}_nA_i\,(2y - x) - \overset{k}{B}_i + {}_n\overset{k}{C}.$$

Mais si l'on se reporte aux définitions des quantités A, B et C (**10**), on voit immédiatement que l'on a

$$
\begin{aligned}
{}_nA_{k+1} &= {}_{k+1}A_n \\
{}_nA_i &= {}_iA_n \\
\overset{k}{B}_i &= {}_i\overset{k}{C} \\
{}_n\overset{k}{C} &= \overset{k}{B}_n
\end{aligned}
$$

d'où

$$(35) \qquad 2\,y\left({}_n\overset{k}{T}_i + {}_{k+1}A_n\right) = {}_iA_n(2\,y - x) + \overset{k}{B}_n - {}_i\overset{k}{C}.$$

Cette formule est l'équation-type d'un nouveau groupe de

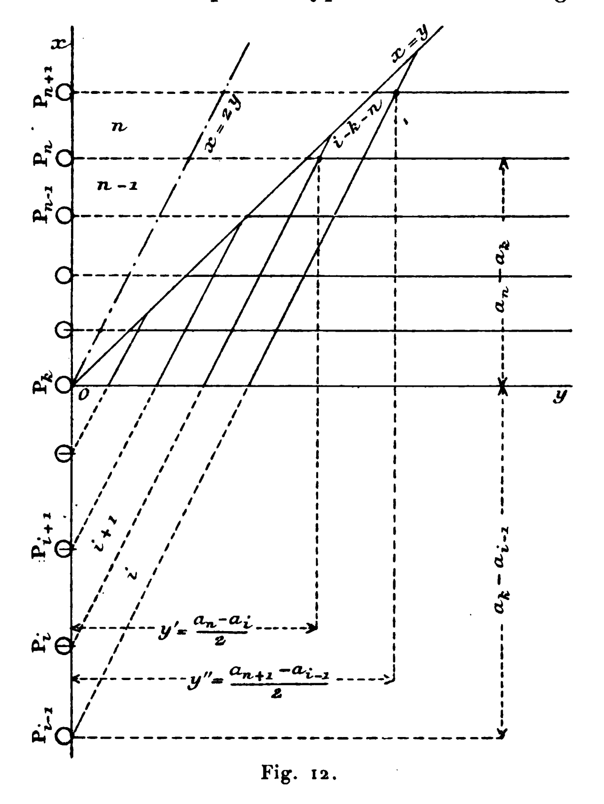


Fig. 12.

surfaces dont les intersections mutuelles s'obtiennent par le tracé d'une épure anologue à celle de la figure 8, page 26; dans les deux

cas la charge P_k est toujours charge principale, la seule différence consiste en ce que le convoi est retourné. Cette nouvelle épure est représentée sur la figure 12.

Ici encore, les valeurs limites de y pour une surface ${}_n\overset{k}{T}_i$ sont

$$y' = \frac{a_n - a_i}{2}$$

$$y'' = \frac{a_{n+1} - a_{i-1}}{2}.$$

20. — Toutes les combinaisons de charges, dans lesquelle P_k est charge principale, sont indiquées par les épures des figures 8 et 12; mais toutes peuvent ne pas être utiles. Il faut maintenant rechercher, parmi ces différentes combinaisons, quelles sont celles qui donnent lieu aux plus grands efforts.

Pour cela, on comparera d'abord entre elles les surfaces telles que ${}_i\overset{k}{T}_n$ et ${}_n\overset{k}{T}_i$ qui correspondent à deux orientations différentes du même convoi partiel. En retranchant l'une de l'autre les équations (32) et (35), on obtient

$$2y\left[\left({}_i\overset{k}{T}_n - {}_n\overset{k}{T}_i\right) + \left({}_iA_{k-1} - {}_{k+1}A_n\right)\right] = -2\left(\overset{k}{B}_n - {}_i\overset{k}{C}\right),$$

d'où

$${}_i\overset{k}{T}_n - {}_n\overset{k}{T}_i = \frac{{}_{k+1}A_n - {}_iA_{k-1}}{y}\left[y - \frac{\overset{k}{B}_n - {}_i\overset{k}{C}}{{}_{k+1}A_n - {}_iA_{k-1}}\right]$$

puis, en posant

$$y_1 = \frac{\overset{k}{B}_n - {}_i\overset{k}{C}}{{}_{k+1}A_n - {}_iA_{k-1}} \tag{36}$$

on a finalement

$${}_i\overset{k}{T}_n - {}_n\overset{k}{T}_i = \left({}_{k+1}A_n - {}_iA_{k-1}\right)\frac{y - y_1}{y}. \tag{37}$$

La droite $y = y_1$ est la projection de l'intersection des deux

surfaces ${}_i\overset{k}{T}_n$ et ${}_n\overset{k}{T}_i$, et nous savons, d'autre part, que ces mêmes surfaces ne sont applicables qu'entre les limites

$$y' = \frac{a_n - a_i}{2} \qquad \text{et} \qquad y'' = \frac{a_{n+1} - a_{i-1}}{2}.$$

Dans le cas où la différence $({}_{k+1}A_n - {}_iA_{k-1})$ est positive, ${}_i\overset{k}{T}_n$ sera supérieur à ${}_n\overset{k}{T}_i$ pour les valeurs de y supérieures à y_1. Si de plus on a $y_1 < y'$, la surface ${}_i\overset{k}{T}_n$ subsistera seule; si $y_1 > y''$, ce sera la surface ${}_n\overset{k}{T}_i$; enfin, si l'on a à la fois $y' < y_1 < y''$, il y aura lieu de considérer les deux surfaces et de tracer leur intersection $y = y_1$.

Dans le cas où la différence $({}_{k+1}A_n - {}_iA_{k-1})$ serait négative, les conclusions précédentes seraient renversées, en ce qui concerne la prédominance de l'une des surfaces sur l'autre.

La comparaison des surfaces telles que ${}_i\overset{k}{T}_n$ et ${}_n\overset{k}{T}_i$ permettra ainsi d'éliminer un certain nombre de combinaisons. Pour achever l'élimination, on sera conduit à chercher la projection de l'intersection de deux surfaces quelconques, ${}_i\overset{k}{T}_n$ et ${}_{i'}\overset{k}{T}_{n'}$, les indices i, n, i' et n' étant indépendants les uns des autres. On obtiendra cette intersection en écrivant les équations des deux surfaces considérées, à l'aide des relations (32) ou (35) suivant les cas, et en éliminant T entre ces deux équations; on aura ainsi l'équation d'une droite que l'on pourra tracer facilement. Le tracé sera soumis à quelques vérifications, si l'on observe que les intersections deux à deux de trois surfaces ont un point commun.

En général, il ne sera pas nécessaire de chercher l'intersection de toutes les surfaces deux à deux. Dès que l'on aura trouvé deux surfaces dont l'intersection ne tombe pas en dehors de la région qui leur est commune, on sera guidé sur les autres combinaisons à comparer entre elles, car l'empiétement du diagramme de la figure 12, page 29 sur celui de la figure 8, page 26 est limité par un ou plusieurs polygones fermés. On pourra donc substituer assez rapidement un diagramme unique aux deux diagrammes obtenus directement.

21. ***Cas général.*** — Dans le cas le plus général, l'effort tranchant n'est pas toujours maximum sous la même charge. Pour être rigoureux, il faudrait d'abord tracer, sur des feuilles séparées, les intersections des surfaces obtenues en considérant successivement chaque charge du convoi comme charge principale, et en ayant égard aux deux orientations du convoi. On réduirait ensuite deux diagrammes en un seul, en cherchant les intersections des surfaces qu'ils représentent ; et, en opérant de proche en proche, on arrivera à obtenir finalement un diagramme unique réunissant toutes les combinaisons utiles et seulement celles-là.

Le plus souvent, il ne sera pas nécessaire de prendre pour charge principale chacune des charges du convoi. Lorsqu'on a quelque expérience de l'étude des charges roulantes, on voit, à l'inspection de la composition du convoi donné, sous quelles charges l'effort tranchant peut devenir maximum, et ces charges sont en nombre très limité ; il en résultera donc une importante simplification.

22. ***Cas particulier où l'effort tranchant est maximum sous la charge de tête.*** — Ce cas particulier est celui qui se rencontre le plus fréquemment, et il n'est pas inutile d'en dire quelques mots. L'hypothèse est que l'effort tranchant devient maximum, toujours sous la charge de tête P_1 (fig. 13) ; c'est-à-dire que l'on a

$$i = k = 1.$$

Fig. 13.

Il convient alors d'appliquer la formule (11) en y, faisant

$$k = 1 \qquad \text{et} \qquad l = 2y ;$$

on obtient ainsi

$${}_1\overset{1}{T}_n = {}_1A_n \frac{2y - x}{2y} - \frac{\overset{1}{B}_n}{2y}.$$

Ici l'indice n suffit à définir la composition du convoi partiel, de sorte que la notation de l'effort tranchant peut être simplifiée et s'écrire simplement T_n; on aura donc

$$(38) \qquad 2\,y\,T_n = {}_1A_n(2\,y - x) - \overset{1}{B}_n.$$

Dans le cas où le convoi aurait une orientation différente de celle indiquée sur la figure 13, on aurait l'équation de la surface correspondante en faisant $i = 1$ et $k = 1$ dans l'équation (35), d'où

$$(39) \qquad 2\,y\left({}_n\overset{1}{T}_1 + {}_2A_n\right) = {}_1A_n(2\,y - x) + \overset{1}{B}_n.$$

mais il n'y a pas lieu de considérer de pareilles surfaces. En effet, les équations (38) et (39) donnent

$$T_n - {}_n\overset{1}{T}_1 = {}_2A_n - \frac{\overset{1}{B}_n}{y}.$$

Or, la surface représentée par l'équation (39) ne peut exister que si l'on a $a_n < x$, et, comme x ne varie que de o à y, on aura a fortiori $a_n < y$; on sait d'autre part (11) que $\overset{1}{B}_n = \sum_{j=2}^{j=n} P_j\, a_j$;

par suite

$${}_2A_n\, y > {}_2A_n\, a_n > \overset{1}{B}_n$$

d'où

$${}_2A_n - \frac{\overset{1}{B}_n}{y} > 0$$

donc T_n est toujours supérieur à ${}_n\overset{1}{T}_1$. (Nous rappelons qu'il ne s'agit ici que des efforts tranchants à gauche de la charge P_1.)

On ne devra donc considérer que les surfaces représentées par l'équation (38).

Les projections des intersections des différentes surfaces, obtenues en faisant varier l'indice n, résulteront évidemment du tracé d'une épure analogue à celle de la figure 8; mais il y a ici

quelques simplifications, ainsi qu'on peut le voir sur la figure 14. Les intersections cherchées ne comprennent que la série des droites parallèles à la direction fixe $x = 2\ y$, de sorte que la région d'influence d'une surface quelconque T_n s'étend depuis la ligne des appuis (axe $o\ y$) jusqu'à la ligne des milieux des travées ($x = y$). Cette région peut n'être affectée que du seul

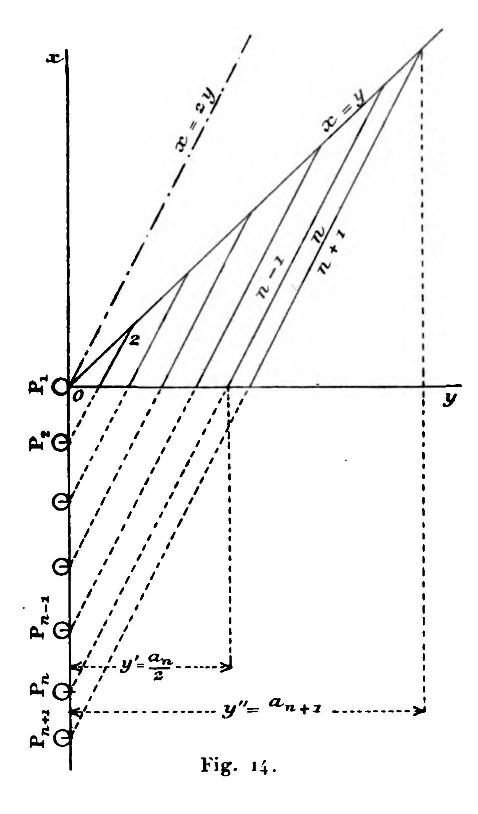


Fig. 14.

numéro n, car il suffit à définir la composition et la situation du convoi partiel, les charges étant distribuées entre la section d'abscisse x et l'appui le plus éloigné (fig. 13).

Les valeurs limites de y, entre lesquelles la surface T_n est applicable, sont

$$y' = \frac{a_n}{2} \qquad \text{et} \qquad y'' = a_{n+1}.$$

§ 3. — LIGNES DE NIVEAU DES EFFORTS TRANCHANTS

23. ***Propriétés des lignes de niveau.*** — Donnons à l'effort tranchant une valeur particulière et bien déterminée T_1; l'équation de la ligne de niveau dans une surface $i - k - n$ se déduira de l'équation générale (32) en y faisant ${}_i\overset{k}{T}_n = T_1$, d'où

$$(40) \qquad 2y(T_1 + {}_iA_{k-1}) = {}_iA_n(2y - x) - \overset{k}{B}_n + {}_i\overset{k}{C}$$

équation de la ligne de niveau, le long de laquelle l'effort tranchant a une valeur constante et égale à T_1. On aura autant de lignes de niveau que l'on donnera de valeurs différentes à l'effort tranchant.

1° *Les lignes de niveau sont des droites,* parce que leur équation est du premier degré en x et y;

2° *Les lignes de niveau d'une même surface rencontrent l'axe* ox *en un point fixe.* — Car, si l'on fait $y = o$ dans l'équation (40), on trouve pour l'abscisse cherchée

$$(41) \qquad x' = -\frac{\overset{k}{B}_n - {}_i\overset{k}{C}}{{}_iA_n}$$

valeur indépendante de l'effort tranchant.

Or $\overset{k}{B}_n$ est la valeur absolue de la somme des moments des charges $P_{k+1} \ldots\ldots P_n$ par rapport au point d'application de la charge principale P_k; ${}_i\overset{k}{C}$ est la valeur absolue de la somme des moments, par rapport au même point, des charges $P_i \ldots\ldots P_{k-1}$; par suite, $\overset{k}{B}_n - {}_i\overset{k}{C}$ est la somme réelle des moments de toutes les charges $P_i \ldots\ldots P_n$ par rapport à ce même point, et le quotient

$$\frac{\overset{k}{B}_n - {}_i\overset{k}{C}}{{}_iA_n}$$

représente la distance, à la charge principale P_k, du centre de

gravité des charges $P_i \ldots\ldots P_n$ qui constituent le convoi partiel.

En tenant compte du signe de x', on voit que, dans la figure 8, le point fixe relatif à la surface $i - k - n$ se confond avec le centre de gravité des charges $P_i \ldots\ldots P_n$ occupant la position qui a servi au tracé de l'épure. Il en serait de même, dans la figure 12, pour le point fixe concernant la surface $n - k - i$.

Si la charge de tête est charge principale (fig. 14, p. 34), la même propriété subsiste, mais l'expression de x' se simplifie et devient

$$(42) \qquad x' = -\frac{\overset{1}{B}_n}{{}_1A_n} = -b_n$$

valeur calculée au tableau des constantes générales du convoi (**12**).

3° *Les lignes de niveau d'une même surface découpent, sur une parallèle quelconque à l'axe* ox, *des segments proportionnels à*

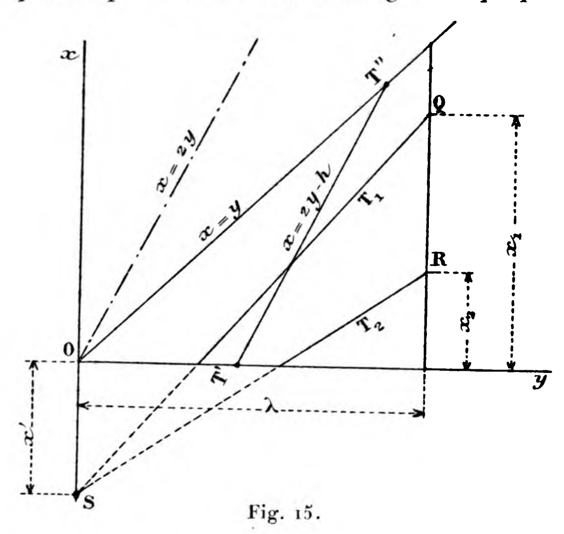


Fig. 15.

leurs intervalles. — Considérons en effet (fig. 15) deux lignes de niveau le long desquelles l'effort tranchant a respectivement pour valeurs T_1 et T_2, et dont les équations seront par suite

$$2y\,(T_1 + {}_iA_{k-1}) = {}_iA_n\,(2y - x) - \overset{k}{B}_n + {}_i\overset{k}{C}$$

$$2y\,(T_2 + {}_iA_{k-1}) = {}_iA_n\,(2y - x) - \overset{k}{B}_n + {}_i\overset{k}{C}.$$

Les abscisses x_1 et x_2 des points Q et R d'intersection de ces lignes de niveau avec la parallèle $y = \lambda$ à l'axe ox ont pour valeurs

$$x_1 = 2\lambda - 2\lambda \frac{T_1 + {}_iA_{k-1}}{{}_iA_n} - \frac{\overset{k}{B}_n - {}_i\overset{k}{C}}{{}_iA_n}$$

$$x_2 = 2\lambda - 2\lambda \frac{T_2 + {}_iA_{k-1}}{{}_iA_n} - \frac{\overset{k}{B}_n - {}_i\overset{k}{C}}{{}_iA_n}$$

ou

$$(43) \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{2\lambda}{{}_iA_n}({}_kA_n - T_1) + x' \\ x_2 = \dfrac{2\lambda}{{}_iA_n}({}_kA_n - T_2) + x' \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$(44) \qquad x_1 - x_2 = \frac{2\lambda}{{}_iA_n}(T_2 - T_1)$$

et le segment $x_1 - x_2$ est proportionnel à l'intervalle $(T_2 - T_1)$ des lignes de niveau.

24. ***Tracé des lignes de niveau.*** — Les intersections des surfaces étant tracées en projection, les lignes de niveau s'obtiennent de la façon suivante, pour chacune des surfaces représentatives.

1° On porte d'abord (fig. 15) sur l'axe ox le point fixe S dont l'abscisse x' est définie par la relation générale (41) ; on obtient ainsi le point de concours de toutes les lignes de niveau de la surface considérée.

2° On trace, à une distance convenable λ de l'axe ox, une parallèle QR à cet axe, et l'on cherche les points Q et R où cette droite rencontre deux lignes de niveau particulières dont les cotes seront T_1 et T_2; on utilise pour cela les équations (43). Le segment QR est ensuite partagé en autant de parties égales que l'intervalle minimum adopté pour les lignes de niveau est contenu de fois dans l'intervalle total $T_2 - T_1$. Si cela est nécessaire, on prolonge les divisions au-dessus de Q et au-dessous de R.

3° On joint au point fixe P les points de division de la droite QR, en se renfermant dans les limites de la région appartenant à la surface que l'on veut représenter.

4° Si le segment QR est divisé en m parties égales, les lignes de niveau aboutissant aux points de division définiront des efforts tranchants égaux à

$$\left(T_1 + \frac{T_2 - T_1}{m}\right), \quad \left(T_1 + 2\,\frac{T_2 - T_1}{m}\right), \quad \left(T_1 + 3\,\frac{T_2 - T_1}{m}\right),$$
$$\ldots\left(T_1 + (m-1)\,\frac{T_2 - T_1}{m}\right).$$

Les cotes des lignes de niveau situées au delà de Q et en deçà de R s'obtiennent sans difficulté.

5° Il est commode, au point de vue de la rapidité et de l'exactitude des opérations, de choisir la distance λ de façon que le segment $QR = x_1 - x_2$ soit exactement divisible par m. L'équation (44) montre que, l'intervalle $T_2 - T_1$ étant lui-même divisible par m, il suffit pour atteindre le but désiré de déterminer λ par la condition que le quotient $\frac{2\lambda}{{}_1A_n}$ s'effectue exactement.

25. ***Vérification du tracé des lignes de niveau.*** — Une première vérification, et la plus importante, est fournie par cette remarque que les lignes de niveau de deux surfaces voisines doivent se rencontrer sur la projection de l'intersection de ces deux surfaces. Les lignes de niveau des différentes surfaces, correspondant à une valeur identique de l'effort tranchant, constituent donc un polygone dont les sommets se trouvent sur les projections des intersections de surfaces.

Dans le cas où la charge de tête est charge principale, l'exactitude du tracé peut encore être vérifiée en des points particuliers par l'application de la proposition suivante : *Si l'on mène une droite quelconque parallèle à la direction* $x = 2y$, *au point où cette droite rencontre l'axe* oy *ou la ligne des appuis, l'effort tranchant a une valeur double de celle qu'il possède au point où la même droite rencontre la ligne des milieux de travées.*

Les intersections des surfaces, dans le cas particulier dont il

s'agit, sont des droites parallèles à la direction $x = 2\,y$ (22, fig. 14, p. 34). Menons, sur la figure 15, la droite $x = 2\,y - h$ ayant la direction indiquée. Le point où elle rencontre l'axe oy a pour coordonnées $x = o$ et $y = \frac{h}{2}$; en portant ces valeurs dans l'équation (38), on trouve que la valeur correspondante T′ de l'effort tranchant est

$$(45) \qquad T' = {}_1A_n - \frac{\overset{1}{B}_n}{h}.$$

Cette même droite coupe la ligne des milieux des travées, $x = y$, en un point dont les coordonnées sont $x = y = h$; d'où pour la valeur T″ de l'effort tranchant en ce point

$$(46) \qquad T'' = \frac{{}_1A_n}{2} - \frac{\overset{1}{B}_n}{2\,h}$$

et T′ est bien double de T″.

26. — Les propriétés des lignes de niveau auraient pu se déduire de l'observation que l'équation (32), dans laquelle on considère x, y et T comme variables, représente un paraboloïde hyperbolique dont les plans directeurs sont les plans xoy et xoT.

Les génératrices parallèles au plan xoy constituent les lignes de niveau.

Les génératrices rectilignes du second système étant parallèles au plan xoT, d'un point à un autre de l'une de ces génératrices, l'effort tranchant varie proportionnellement aux ordonnées d'une ligne droite. Ceci est d'accord avec la 3ᵉ propriété des lignes de niveau.

§ 4. — EMPLOI DU CALCUL POUR LA DÉTERMINATION DES EFFORTS TRANCHANTS

27. — L'épure des lignes de niveau des efforts tranchants permet d'apprécier, ainsi qu'il a été dit (**3**), la valeur de l'effort tran-



chant dans une section donnée d'une poutre donnée; l'interpolation se fait en utilisant la 3[e] propriété des lignes de niveau. L'approximation avec laquelle s'obtient cette évaluation dépend des échelles employées et du soin apporté au tracé de l'épure.

Dans les cas particuliers où l'on voudra connaître l'effort tranchant avec plus de précision, il faudra recourir au calcul; mais ce calcul peut être abrégé si l'on a pris soin de dresser, une fois pour toutes, un tableau des valeurs des coefficients A, B et C correspondant à toutes les combinaisons de charges indiquées par l'épure.

On cherchera sur l'épure la position du point représentant la section dans laquelle on veut calculer l'effort tranchant; ce point tombera dans une région du plan qui porte des indices fixant la composition du convoi et la charge principale. A l'aide du tableau des coefficients A, B et C, on pourra donc écrire immédiatement, avec des coefficients numériques, l'une des trois équations (32), (35) ou (38) que nous répétons ci-dessous

$$\text{Indices } i - k - n : 2y\,(T + {}_{i}A_{k-1}) = {}_{i}A_{n}\,(2y - x) - \overset{k}{B}_{n} + {}_{i}\overset{k}{C};$$

$$\text{Indices } n - k - i : 2y\,(T + {}_{k+1}A_{n}) = {}_{i}A_{n}\,(2y - x) + \overset{k}{B}_{n} - {}_{i}\overset{k}{C};$$

$$\text{Indice } n \text{ (équivalent à } 1 - 1 - n) : 2y\,T = {}_{1}A_{n}\,(2y - x) - \overset{1}{B}_{n}.$$

On connaît l'abscisse x et la demi-portée y, on calculera dans chaque cas particulier la valeur de l'effort tranchant T.

Si l'on devait tenir compte, en même temps, d'une charge uniformément répartie, dont l'intensité est p par unité de longueur, il faudrait ajouter l'effort supplémentaire

$$p\,(y - x)$$

à l'effort tranchant développé par le convoi.

CHAPITRE IV

MOMENTS DE FLEXION

§ I. — DISPOSITION GÉNÉRALE ADOPTÉE POUR L'ÉPURE

28. ***Transformation de l'équation des moments.*** — Reprenons le convoi partiel $P_i \ldots P_k \ldots P_n$ dans la position indiquée par la figure 6 (p. 22), la portée de la poutre étant l, et la section située sous la charge principale P_k ayant une abscisse x. Dans ces conditions, le moment de flexion développé dans cette section est donné par la formule (12)

$$(12) \qquad {}_i\overset{K}{M}_n = {}_iA_n \frac{x\,(l-x)}{l} - \overset{K}{B}_n \frac{x}{l} - {}_i\overset{K}{C} \frac{l-x}{l}.$$

Cette équation n'est pas du premier degré en x et l; par suite, les lignes de niveau de la surface qu'elle représente ne sont pas des droites. Il convient donc de transformer l'équation.

Posons pour cela

$$(47) \qquad t = \frac{x}{l-x}$$

et éliminons l entre les équations (12) et (47); nous obtenons

$$(48) \qquad (1+t)\,{}_i\overset{K}{M}_n = {}_iA_n x - \overset{K}{B}_n t - {}_i\overset{K}{C}$$

équation du premier degré en x et t. Si donc on la considère comme l'équation d'une surface représentative des moments, cette surface admettra des lignes de niveau rectilignes.

29. — Le plan, sur lequel doivent être tracées les lignes de

niveau des moments de flexion, contient les axes de coordonnées ox et ot; prenons donc deux axes rectilignes quelconques ox, ot (fig. 16).

Comme les convois peuvent circuler dans les deux sens, il

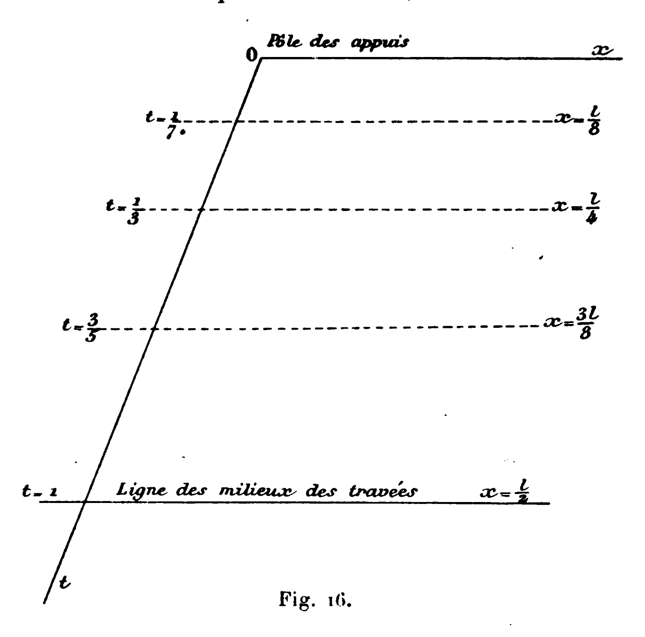


Fig. 16.

suffit d'obtenir les moments dans une moitié de travée, et l'on aura les limites de l'épure en considérant les valeurs extrêmes de x et de t.

Pour l'appui appartenant à la moitié de gauche de la poutre, on a $x = o$, d'où $t = o$, quelle que soit la portée. L'origine o des axes est donc un *pôle* commun à tous les appuis.

Pour toutes les sections situées au milieu des travées, on a uniformément $t = 1$; la droite $t = 1$ parallèle à l'axe ox est donc la *ligne des milieux des travées*. Le diagramme se trouvera donc limité entre les deux parallèles ox et $t = 1$.

Lorsque l'abscisse x d'une section est définie par la relation particulière

$$x = \frac{m}{n} l, \tag{49}$$

la valeur correspondante de t est, d'après la formule (47)

(50) $$t = \frac{m}{n - m}\, l.$$

Donc les points correspondant aux sections, qui jouissent de la propriété indiquée par la relation (49), sont distribués sur des lignes parallèles à l'axe ox.

Si l'on attribue à x les valeurs successives

$$\frac{l}{n},\ \frac{2l}{n},\ \frac{3l}{n},\ \frac{4l}{n},\ \ldots \frac{ml}{n},\ \ldots \frac{l}{2},$$

les valeurs correspondantes de t seront

$$\frac{1}{n-1},\ \frac{2}{n-2},\ \frac{3}{n-3},\ \frac{4}{n-4},\ \ldots \frac{m}{n-m},\ \ldots 1;$$

la variation de t est donc plus rapide que celle de x. Par suite, l'approximation que fournira le tracé pour les sections avoisinant le milieu des travées sera plus grande que pour les sections rapprochées des appuis. Ce résultat est conforme à ce que la pratique peut exiger.

30. — Pour trouver sur l'épure la position du point représentant une section déterminée, on peut employer plusieurs méthodes. Les données directes sont : l'abscisse x_1 de la section, et la portée l_1 de la poutre.

1° On peut calculer, par la formule (47), la valeur de t correspondant aux données x_1 et l_1,

$$t_1 = \frac{x_1}{l_1 - x_1}.$$

et le point cherché m_1 se trouvera à l'intersection des deux droites parallèles aux axes, $x = x_1$ et $t = t_1$ (fig. 17).

2° Le même point peut encore être obtenu, sans calculer t_1, par l'intersection de la droite $x = x_1$ et d'une droite ob déterminée en prenant, sur la ligne des milieux des travées et à partir de l'axe ot, une longueur $ab = l_1 - x_1$. En effet, les coordonnées

du point b étant $x = l_1 - x_1$ et $t = 1$, l'équation de la droite ob est

$$\frac{t}{x} = \frac{1}{l_1 - x_1} \tag{51}$$

et cette droite coupe la ligne $x = x_1$ en un point dont les coordonnées sont

$$x = x_1 \qquad \text{et} \qquad t_1 = \frac{x_1}{l_1 - x_1}$$

c'est-à-dire précisément celles du point m_1 cherché.

Pour faciliter l'application de cette deuxième méthode, on

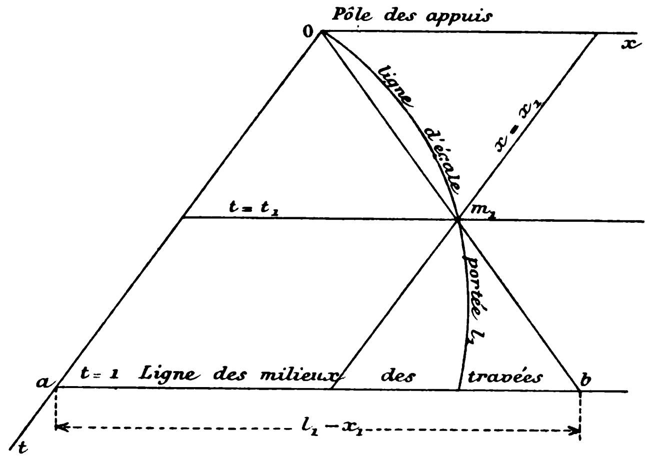


Fig. 17.

pourrait tracer sur l'épure le double réseau des droites $x = x_1$ et $\frac{t}{x} = \frac{1}{l_1 - x_1}$; les premières sont toutes parallèles à l'axe ot, et les secondes sont toutes issues du pôle o. Ce procédé paraît très simple, mais nous n'avons pas cru devoir l'employer, parce qu'un grand nombre des droites du second système se seraient confondues avec les projections des intersections des surfaces des moments, surtout aux environs du pôle des appuis.

3° Le point représentatif d'une section donnée peut s'obtenir enfin par l'intersection de la droite $x = x_1$ et de la *ligne d'égale portée* l_1 (fig. 17) conformément aux indications géné-

rales du n° 6. C'est ce dernier procédé que nous avons adopté, en traçant sur l'épure un réseau de lignes d'égale portée; il est en effet d'un grand intérêt, au point de vue pratique, d'avoir immédiatement la suite des points qui représentent toutes les sections d'une même poutre.

§ 2. — LIGNES D'ÉGALE PORTÉE

31. ***Équation des lignes d'égale portée.*** — Les lignes d'égale portée sont les projections des lignes de niveau de la surface représentée par l'équation (47) dans laquelle les trois variables sont x, t et l, et qui est indépendante des charges.

Pour une portée particulière l_1, l'équation de la ligne correspondante est

$$t = \frac{x}{l_1 - x} \tag{52}$$

et elle représente une *hyperbole* dont les asymptotes, parallèles aux axes, sont

$$x = l_1 \quad \text{et} \quad t = -1.$$

De l'équation (52) on tire

$$\frac{dx}{dt} = \frac{l_1 - x}{1 + t}$$

et l'équation de la tangente en un point, de coordonnées x' et t', est la suivante

$$x - x' = \frac{l_1 - x'}{1 + t'}(t - t'). \tag{53}$$

32. ***Propriétés des lignes d'égale portée.*** — Les propriétés dont il s'agit sont celles qui ont leur utilité pour le tracé de ces lignes (fig. 18).

1° Toutes les lignes d'égale portée passent par le pôle 0 des appuis, car leur équation (52) est satisfaite par les valeurs simultanées $x = o$ et $t = o$.

2° La ligne d'égale portée l_1 rencontre la droite $t = 1$ en un point A qui a pour abscisse $\frac{l_1}{2}$. Son équation (52) est en effet vérifiée par le système $t = 1$, $x = \frac{l_1}{2}$.

3° La tangente, au pôle 0, à l'hyperbole d'égale portée l_1 ren-

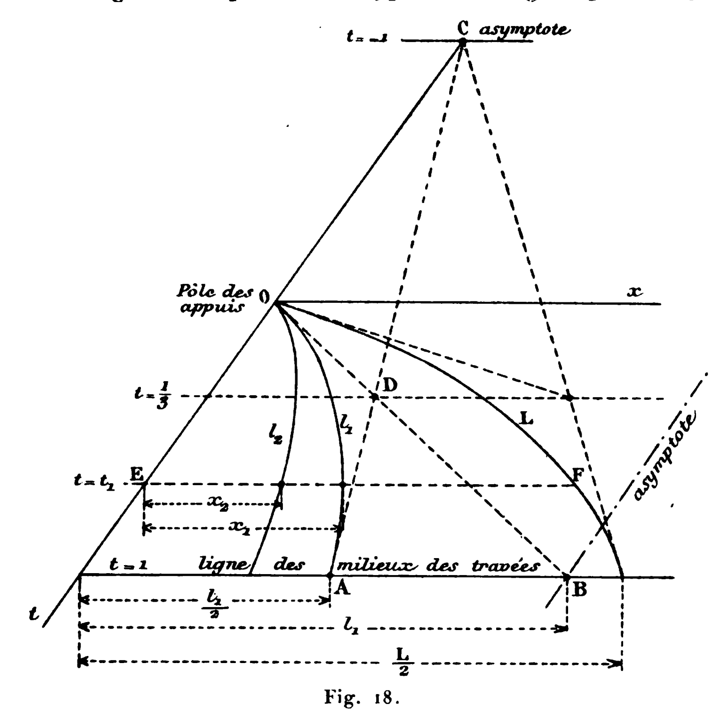


Fig. 18.

contre la droite $t = 1$ en un point B situé à une distance l_1 de l'axe ot. En effet, l'équation de la tangente au pôle s'obtient en remplaçant x' et t' par zéro dans la formule (53), d'où

$$(54) \qquad x = l_1 t$$

équation qui, pour $t = 1$, donne $x = l_1$.

4° Les diverses tangentes aux hyperboles d'égale portée, aux points A où ces lignes coupent la ligne des milieux des travées ($t = 1$), passent par un point fixe C qui est le point d'intersection de l'axe ot et de la droite $t = -1$.

Les coordonnées du point de contact A étant

$$x' = \frac{l_1}{2} \quad \text{et} \quad t' - 1,$$

l'équation de la tangente en ce point est, d'après la formule (53),

$$x - \frac{l_1}{2} = \frac{l_1}{4}(t - 1)$$

ou

(55) $$x = \frac{l_1}{4}(t + 1)$$

et l'on voit que cette équation est satisfaite, quel que soit l_1, si l'on fait à la fois $x = o$ et $t = -1$, coordonnées du point fixe C.

5° Le lieu des points de rencontre D des deux tangentes à une même hyperbole, au pôle o et au point A situé sur la ligne des milieux des travées, est une droite parallèle à l'axe ox et dont l'équation est $t = \frac{1}{3}$.

En éliminant l_1 entre les équations (54) et (55) des deux tangentes considérées, on trouve en effet pour l'équation du lieu

$$x = \frac{x}{4t}(t + 1)$$

et, en supprimant la solution $x = o$ qui ne peut convenir, il reste $t = \frac{1}{3}$.

6° Les segments découpés sur une même parallèle à l'axe ox, par des lignes d'égale portée l_1, l_2, l_3..., sont proportionnels aux intervalles $l_1 - l_2$, $l_2 - l_3$... de ces lignes.

Coupons en effet les deux hyperboles l_1 et l_2 dont les équations sont

$$t = \frac{x}{l_1 - x} \quad \text{et} \quad t = \frac{x}{l_2 - x},$$

par une droite EF parallèle à l'axe ox et dont l'équation est

$t = t_1$. Les abscisses x_1 et x_2 des points d'intersection ont pour valeurs

$$x_1 = \frac{t_1}{1+t_1} l_1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{t_1}{1+t_1} l_2$$

d'où

$$x_1 - x_2 = \frac{t_1}{1+t_1} (l_1 - l_2) \tag{56}$$

relation qui démontre la proposition énoncée.

33. ***Tracé des lignes d'égale portée.*** — On commence par tracer soigneusement, à l'aide de points et de tangentes, la ligne de plus grande portée L compatible avec les dimensions de l'épure (fig. 18, p. 46).

On mène ensuite une série de droites, telles que EF, parallèles à l'axe ox, et on partage chaque segment total en un même nombre de parties égales dont chacune correspond à l'intervalle adopté entre les portées successives que l'on veut représenter. Il reste à réunir, par des courbes continues, les points qui se correspondent dans chaque segment; aux extrémités, les directions des courbes seront fixées par le tracé préalable des tangentes.

34. ***Lignes intercalaires.*** — Soit donnée une poutre de portée l_1, et dans cette poutre une section située à une distance x_1 de l'appui le plus rapproché. Si la ligne d'égale portée l_1 est tracée sur l'épure, le point m_1 représentatif de la section donnée se trouvera à l'intersection de la droite $x = x_1$ et de l'hyperbole l_1 (fig. 19).

Il peut arriver que la portée l de la poutre à étudier ne soit pas représentée sur l'épure, et dans ce cas il peut être utile de pouvoir tracer l'hyperbole l à l'aide des autres lignes existantes.

Soient OA_1 et OA_2 les hyperboles des portées l_1 et l_2 qui comprennent entre elles la portée l,

$$l_2 < l < l_1.$$

On aura immédiatement le point A d'aboutissement de l'hyper-

bole l sur la ligne des milieux des travées, en prenant sur cette ligne une abscisse égale à $\frac{l}{2}$ (32. — 1°).

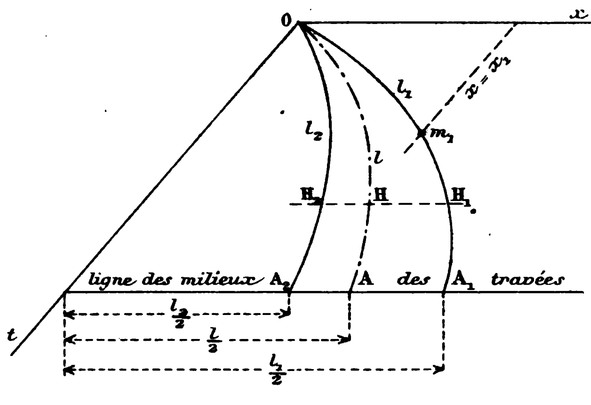


Fig. 19.

On aura ensuite autant de points que l'on voudra en prenant, sur une parallèle quelconque H_2H_1 à l'axe ox, un point H tel que

$$(57) \qquad \frac{\overline{H_2H}}{\overline{HH_1}} = \frac{\overline{A_2A}}{\overline{AA_1}}.$$

En effet, t étant l'ordonnée de la droite H_2H_1, on a, par la formule (56),

$$\overline{H_2H} = \frac{t}{1+t}(l - l_2) \quad \text{et} \quad \overline{HH_1} = \frac{t}{1+t}(l_1 - l)$$

d'où

$$\frac{\overline{H_2H}}{\overline{HH_1}} = \frac{l - l_2}{l_1 - l}.$$

On trouverait de même

$$\frac{\overline{A_2A}}{\overline{AA_1}} = \frac{l - l_2}{l_1 - l}.$$

d'où l'on déduit la formule (57).

§ 3. — INTERSECTIONS DES SURFACES REPRÉSENTATIVES

35. ***Equation générale des projections des intersections.*** — Les projections, sur le plan xot, des intersections des surfaces des moments sont rectilignes. En effet, l'équation d'une surface caractérisée par les trois indices i, k, n des charges étant (48)

$$(1 + t)\,{}_i\overset{k}{M}_n = {}_iA_n x - \overset{k}{B}_n t - {}_i\overset{k}{C}, \tag{48}$$

deux surfaces quelconques auront des équations de la forme

$$(1 + t)\,M = A'x - B't - C'$$
$$(1 + t)\,M = A''x - B''t - C''$$

Eliminons M entre ces deux équations, nous aurons ainsi l'équation de la projection de l'intersection des deux surfaces,

$$(A' - A'')\,x - (B' - B'')\,t - (C' - C'') = 0 \tag{58}$$

laquelle est du premier degré.

D'une manière générale, cette droite pourra être déterminée par les points où elle coupe l'axe ox et la ligne des milieux des travées ($t = 1$), figure 20.

En faisant $t = o$ dans l'équation (58), on a pour l'abscisse du point de rencontre de la droite avec ox,

$$x_0 = \frac{C' - C''}{A' - A''}. \tag{59}$$

D'autre part, l'hypothèse $t = 1$ fournit la valeur suivante de l'abscisse du point situé sur la ligue des milieux des travées

$$x_1 = \frac{(B' - B'') + (C' - C'')}{A' - A''}. \tag{60}$$

Examinons maintenent quelques cas particuliers.

1° $A' = A''$. — L'équation (58) se réduit alors à

$$t = - \frac{C' - C''}{B' - B''} \tag{61}$$

et la projection de l'intersection est parallèle à l'axe *ox*.

Ce cas se présente lorsque, aux deux surfaces qui se coupent, correspondent deux convois partiels dans lesquels la somme des intensités des charges a la même valeur. On voit immédiatement que cela arrive en particulier pour les surfaces représen-

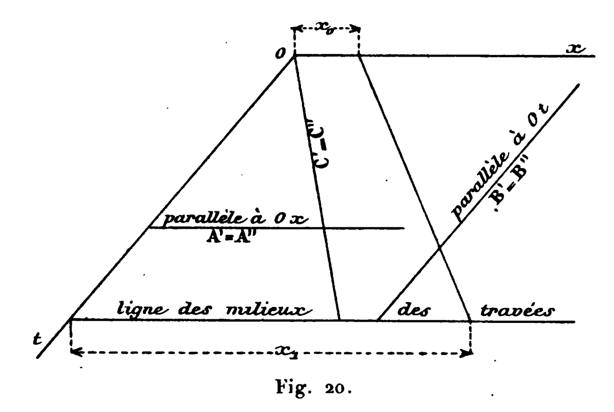


Fig. 20.

tatives des moments sous deux charges consécutives d'un même convoi partiel.

Considérons ce dernier cas, et soient les équations des deux surfaces des moments sous les charges P_k et P_{k1} d'un même convoi partiel $P_1 \ldots P_n$:

$$(1+t)\,{}_1\overset{k}{M}_n = {}_1A_n x - \overset{k}{B}_n t - {}_1\overset{k}{C}$$

$$(1+t)\,{}_1\overset{k+1}{M}_n = {}_1A_n x - \overset{k+1}{B}_n t - {}_1\overset{k+1}{C}.$$

L'équation de la projection de l'intersection est

$$t = -\frac{{}_1\overset{k}{C} - {}_1\overset{k+1}{C}}{\overset{k}{B}_n - \overset{k+1}{B}_n}.$$

Mais les formules (27) et (30) donnent

$$\overset{K}{B}_n - \overset{K+1}{B}_n = {}_{K+1}A_n\,(a_{K+1} - a_K)$$

$${}_1\overset{K}{C} - {}_1\overset{K+1}{C} = -\,{}_1A_K\,(a_{K+1} - a_K)$$

d'où

(62) $$t = \frac{{}_{i}A_{k}}{{}_{k+1}A_{n}}.$$

2° $B' = B''$. — Les deux abscisses x_0 et x_1 deviennent égales entre elles, et la projection de l'intersection est une droite parallèle à l'axe ot; son équation est

(63) $$x = \frac{C' - C'}{A' - A''}.$$

3°. $C' = C''$. — L'abscisse x_0 est nulle, et la droite passe par l'origne des axes. L'abscisse du point de rencontre de cette droite avec la ligne des milieux des travées prend la valeur

(64) $$x_1 = \frac{B' - B''}{A' - A''}.$$

36. ***Cas où la charge principale*** P_k ***est invariable.*** — Il convient tout d'abord de chercher les projections des intersections des surfaces pour lesquelles l'indice k de la charge principale est le même; pour cela nous ferons varier successivement les indices i et n des charges extrêmes.

1° *Intersection des surfaces* ${}_{i}\overset{k}{M}_{n}$ *et* ${}_{i+1}\overset{k}{M}_{n}$. — On se trouve ici dans le 2e cas du n° **35**, et l'intersection des deux surfaces considérées se projette suivant une droite parallèle à l'axe ot, et dont l'équation est, d'après la formule (63),

$$x = \frac{{}_{i}\overset{k}{C} - {}_{i+1}\overset{k}{C}}{{}_{i}A_{n} - {}_{i+1}A_{n}}.$$

Or, les équations (25) et (20) permettent d'écrire

$${}_{i}A_{n} - {}_{i+1}A_{n} = P_{i}$$

$${}_{i}\overset{k}{C} - {}_{i+1}\overset{k}{C} = P_{i}(a_{k} - a_{i})$$

et l'équation précédente devient

(65) $$x = a_{k} - a_{i}.$$

La position de l'intersection est indépendante de la valeur de l'indice de la charge extrême P_n; par suite, quel que soit le nombre des charges situées à droite de la charge principale P_k, cette droite est invariable.

2° *Intersection des surfaces* ${}_i\overset{k}{M}_n$ *et* ${}_i\overset{k}{M}_{n+1}$. — Les deux surfaces se trouvent dans les conditions du troisième cas du n° **35**; elles se coupent donc suivant une ligne qui a pour projection une droite issue de l'origine des axes, et qui rencontre la ligne des milieux des travées en un point dont l'abscisse a pour valeur

$$x_1 = \frac{\overset{K}{B}_n - \overset{K}{B}_{n+1}}{{}_iA_n - {}_iA_{n+1}}.$$

Mais les formules (26) et (28) donnent

$${}_iA_n - {}_iA_{n+1} = - P_{n+1}$$
$$\overset{K}{B}_n - \overset{K}{B}_{n+1} = - P_{n+1}(a_{n+1} - a_K)$$

d'où l'on déduit

(66) $$x_1 = a_{n+1} - a_K$$

valeur indépendante de l'indice i. Donc l'abscisse x_1 est constante quel que soit le nombre des charges situées à gauche de la charge principale P_k.

Plaçons (fig. 21) dans la position (G) les charges situées à gauche de la charge P_k dans le convoi total, et projetons les points d'application des charges sur la droite $t = 1$. Puis menons par les points obtenus des parallèles à l'axe $o\,t$; nous aurons ainsi toute la série des droites satisfaisant à l'équation (65).

De même, les charges situées à droite de P_k étant placées dans la position (D), et leurs points d'application projetés sur la droite $t = 1$ étant joints au point o, on aura le faisceau des droites déterminées par l'équation (66).

Ainsi se trouvent délimitées les régions d'influence des convois partiels qui ont tous P_k pour charge principale. Le tracé est indépendant des intensités des charges et il ne fait intervenir que leurs espacements; on pourrait le justifier directement par des raisonnements analogues à ceux du n° **18**.

37. ***Cas où le convoi est retourné.*** — L'épure de la figure 21 suppose que le convoi est toujours orienté de la même façon, comme dans la figure 6 (p. 22). Comme le convoi peut circuler dans les deux sens, il y a lieu de considérer le cas où son orientation est celle marquée par la figure 11 (p. 28). Le moment de flexion correspondant à cette dernière position des charges sera représenté par le symbole ${}_n\overset{k}{M}_i$, et l'on aura son

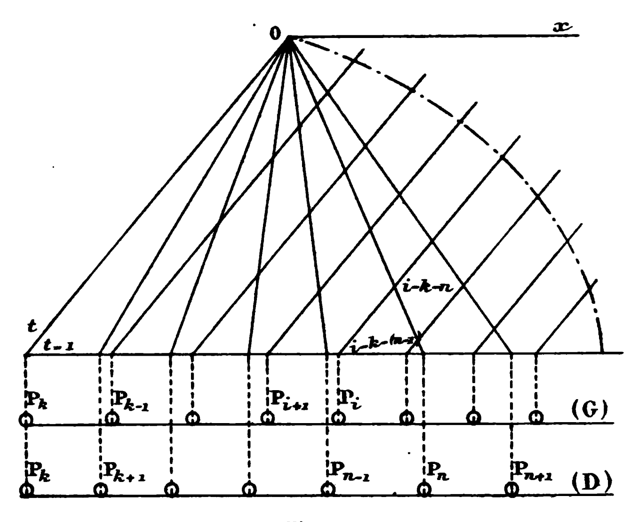


Fig. 21.

expression en permutant entre eux, dans la formule (48), les indices i et n, d'où

$$(1+t)\,{}_n\overset{k}{M}_i = {}_nA_i x - \overset{k}{B}_i t - {}_n\overset{k}{C}$$

Mais, d'après les définitions des quantités A, B et C (10), on a évidemment

$${}_nA_i = {}_iA_n$$

$$\overset{k}{B}_i = {}_i\overset{k}{C}$$

$${}_n\overset{k}{C} = \overset{k}{B}_n$$

et l'équation précédente devient

(67) $$(1+t)\,{}_n\overset{k}{M}_i = {}_iA_n x - {}_i\overset{k}{C} t - \overset{k}{B}_n.$$

Cette formule est l'équation-type d'une nouvelle série de surfaces dont les intersections mutuelles s'obtiennent par le tracé d'une épure analogue à celle de la figure 21. Dans les deux cas la charge P_k est charge principale ; la seule différence consiste en ce que les charges de gauche deviennent charges de droite, et réciproquement. Cette nouvelle épure est représentée sur la figure 22.

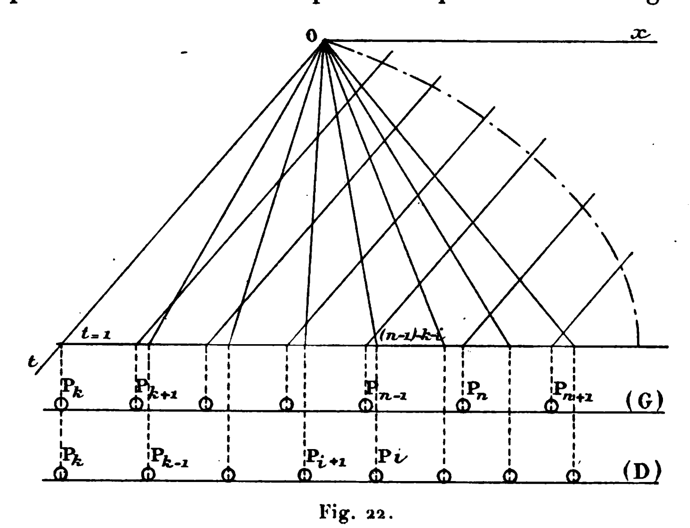


Fig. 22.

Les trois indices qui définissent une région quelconque sont faciles à déterminer sur l'une et l'autre épure.

38. — On obtient par le tracé des épures des figures 21 et 22, pages 54-55, toutes les combinaisons de charges qui admettent P_k pour charge principale, et avec les deux orientations possibles des convois. Il s'agit maintenant de rechercher, parmi ces différentes combinaisons, celles qui donnent lieu aux plus grands moments de flexion.

Comparons d'abord entre elles deux surfaces, ${}_i\overset{k}{M}_n$ et ${}_n\overset{k}{M}_i$, qui répondent aux deux orientations du même convoi partiel. En retranchant l'une de l'autre les équations (48) et (67), on a

$$(1+t)\left({}_i\overset{K}{M}_n - {}_n\overset{K}{M}_i\right) = \left(\overset{K}{B}_n - {}_i\overset{K}{C}\right)(1-t).$$

Comme t ne peut varier que de zéro à 1, il en résulte que :

1° Les moments ${}_i\overset{k}{M}_n$ et ${}_n\overset{k}{M}_i$ sont égaux pour $t = 1$, c'est-à-dire dans les sections des milieux des travées;

2° Le moment ${}_i\overset{k}{M}_n$ est supérieur au moment ${}_n\overset{k}{M}_i$, lorsque $\overset{k}{B}_n$ est lui-même plus grand que ${}_i\overset{k}{C}$;

3° Le moment ${}_i\overset{k}{M}_n$ est inférieur au moment ${}_n\overset{k}{M}_i$, lorsque $\overset{k}{B}_n$ est inférieur à ${}_i\overset{k}{C}$. Dans ce dernier cas, il faut substituer la surface représentative du moment ${}_n\overset{k}{M}_i$ à celle du moment ${}_i\overset{k}{M}_n$.

La comparaison des surfaces $i - k - n$ et $n - k - i$ permettra ainsi d'éliminer un certain nombre de combinaisons. Pour achever de définir les régions relatives à chaque surface, on sera conduit à chercher la projection de l'intersection de deux surfaces quelconques ${}_i\overset{k}{M}_n$ et ${}_{i'}\overset{k'}{M}_n$, les indices pouvant être tous différents les uns des autres; on obtiendra cette intersection par les procédés du n° **35**.

39. ***Cas général***. — Le cas général, où le moment de flexion est successivement maximum sous différentes charges d'un convoi donné, se traite exactement de la même façon qu'il a été expliqué pour les efforts tranchants (21).

Trois surfaces quelconques des moments ayant toujours un point commun, une ligne quelconque du réseau polygonal aboutit toujours au point de croisement de deux autres. Cette remarque sera utile pour la vérification du tracé.

§ 4. — LIGNES DE NIVEAU DES MOMENTS DE FLEXION

40. ***Propriétés des lignes de niveau***. — Si l'on donne au moment de flexion une valeur constante M_1, la ligne de niveau dans une surface $i - k - n$ se projette suivant une ligne dont l'équation s'obtient en faisant ${}_i\overset{k}{M}_n = M_1$ dans la formule (48), d'où

$$(68) \qquad (1 + t) M_1 = {}_iA_n x - \overset{k}{B}_n t - {}_i\overset{k}{C}.$$

Tout le long de cette ligne le moment a une valeur fixe et égale

à M_1. On aura autant de lignes de niveau que l'on donnera de valeurs différentes au moment de flexion.

1° *Les lignes de niveau sont des droites,* parce que leur équation est du premier degré en x et t.

2° *Les lignes de niveau d'une même surface rencontrent la droite* t = — 1 *en un point fixe.* — Si l'on fait en effet $t = -1$ dans l'équation (68), on trouve pour l'abscisse du point de rencontre cherché :

$$x' = -\frac{\overset{k}{B}_n - {}_i\overset{k}{C}}{{}_iA_n} \tag{69}$$

valeur indépendante du moment de flexion et constante pour une même surface.

Si l'on se reporte au n° **23**, 2°, on voit que la valeur absolue de l'abscisse x' représente la distance, à la charge principale P_k, du centre de gravité des charges $P_i \ldots\ldots P_n$ du convoi partiel. L'abscisse x' est toujours négative, puisque l'on n'a à considérer que les surfaces pour lesquelles $\overset{k}{B}_n$ est supérieur à ${}_i\overset{k}{C}$ (38).

Plaçons le convoi partiel $P_i \ldots\ldots P_n$ sur la droite $t = -1$, de façon que la charge principale P_k soit sur l'axe ot, et la charge P_i du côté des x positifs (fig. 23). Dans cette position, le centre de gravité du convoi partiel coïncide avec le point fixe S des lignes de niveau de la surface considérée $i - k - n$.

3° *Les lignes de niveau d'une même surface découpent, sur une parallèle quelconque à* ox, *des segments proportionnels à leurs intervalles.* — Considérons, en effet (fig. 23), deux lignes de niveau SQ et SR le long desquelles le moment de flexion a respectivement pour valeurs M_1 et M_2, et coupons ces deux droites par une parallèle QR à l'axe ox, l'équation de cette parallèle étant $t = \lambda$.

Les équations des deux lignes de niveau sont :

$$(1 + t) M_1 = {}_iA_n x - \overset{k}{B}_n t - {}_i\overset{k}{C}$$

$$(1 + t) M_2 = {}_iA_n x - \overset{k}{B}_n t - {}_i\overset{k}{C}$$

d'où, pour les abscisses x_1 et x_2 des points d'intersection Q et R

$$(70) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{(1+\lambda)\, M_1 + \overset{K}{B}_n \lambda + {}_i\overset{K}{C}}{{}_iA_n} \\ x_2 &= \frac{(1+\lambda)\, M_2 + \overset{K}{B}_n \lambda + \overset{K}{C}}{{}_iA_n} \end{aligned} \right.$$

On en déduit pour la valeur du segment $x_2 - x_1$

$$(71) \qquad x_2 - x_1 = \frac{1+\lambda}{{}_iA_n} (M_2 - M_1)$$

et l'on voit qu'il est bien proportionnel à l'intervalle $(M_2 - M_1)$ des lignes de niveau.

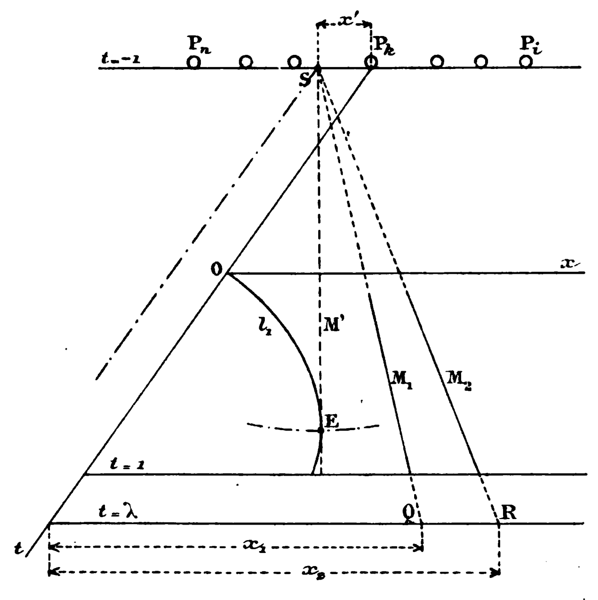


Fig. 23.

41. ***Tracé des lignes de niveau.*** — Ce tracé s'effectue comme celui des lignes de niveau des efforts tranchants (**24**), en utilisant les propriétés précédentes. Dans l'application de la troisième propriété, il conviendra de choisir λ de façon que le quotient $\dfrac{1+\lambda}{{}_iA^n}$ s'obtienne exactement.

Comme vérification, les lignes de niveau d'égale puissance et appartenant à des surfaces différentes doivent se rencontrer sur la projection de l'intersection de ces surfaces.

42. ***Lignes des moments maximums maximorum.*** — Dans une poutre de portée déterminée, il existe au moins une section telle que le moment de flexion y est plus grand que dans les sections qui la précèdent et qui la suivent immédiatement. La ligne des moments maximums maximorum, pour une surface donnée, est la ligne dont la projection est le lieu des points qui représentent ces sections particulières.

Pour trouver l'équation d'une telle ligne, il faut annuler la dérivée $\frac{dM}{dx}$ prise en supposant la portée l constante.

L'expression du moment, en fonction de x et de l, est donnée par la formule (12).

$$(12) \qquad {}_i\overset{K}{M}_n = {}_iA_n \frac{x(l-x)}{l} - \overset{K}{B}_n \frac{x}{l} - {}_i\overset{K}{C} \frac{l-x}{l}$$

On en déduit

$$\frac{d\,{}_i\overset{K}{M}_n}{dx} = {}_iA_n \frac{l-2x}{l} - \frac{\overset{K}{B}_n}{l} + \frac{{}_i\overset{K}{C}}{l} = 0$$

d'où pour l'équation du lieu

$$(72) \qquad x = \frac{l}{2} - \frac{\overset{K}{B}_n - {}_i\overset{K}{C}}{2\,{}_iA_n}$$

Si, au lieu des coordonnées x et l, on prend les coordonnées x et t de l'épure, la formule (47) permet de transformer l'équation (72) en la suivante :

$$(73) \qquad x\frac{1-t}{t} = \frac{\overset{K}{B}_n - {}_i\overset{K}{C}}{{}_iA_n};$$

C'est l'équation d'une hyperbole qui a pour asymptotes les droites

$$t = 1$$

$$x = -\frac{\overset{K}{B}_n - {}_i\overset{K}{C}}{{}_iA_n}$$

la première est fixe, la seconde est la parallèle à l'axe *ot* menée par le point S (fig. 23).

L'équation (73) peut servir à tracer la ligne par points.

43. ***Propriété géométrique des lignes des moments maximums maximorum.*** — La ligne des moments maximums maximorum est le lieu des points de contact des lignes de niveau avec les hyperboles d'égale portée.

Traçons en effet, sur la figure 23, page 58, la ligne d'égale portée l_1, et menons du point S la tangente SE à l'hyperbole. Soit M' la valeur du moment le long de la ligne de niveau AE. A toute autre ligne de niveau coupant la ligne d'égale portée l_1 correspondra une valeur du moment inférieure à M'. Le point de contact E est donc bien le point de la ligne l_1 où le moment atteint sa plus grande valeur.

Cette propriété peut être utilisée pour déterminer certains points particuliers de la ligne des moments maximums maximorum. En outre elle permet de reconnaître immédiatement, après le tracé des lignes d'égale portée et des lignes de niveau, quelles sont les surfaces sur lesquelles on peut rencontrer de pareilles lignes.

44. — Il n'est peut-être pas sans intérêt de remarquer que l'équation (48) des moments, dans le système des coordonnées M, x et t, représente un paraboloïde hyperbolique qui admet les plans xot et xoM pour plans directeurs.

Le système des génératrices rectilignes parallèles au plan xot fournit les lignes de niveau.

La considération des génératrices parallèles au plan xoM donne une autre justification de la troisième propriété de ces lignes de niveau, énoncée au n° **40**.

§ 5. — EMPLOI DU CALCUL POUR LA DÉTERMINATION DES MOMENTS DE FLEXION

45. — L'usage de l'épure des lignes de niveau des moments de flexion se fait conformément aux indications générales du n° **3**;

quand une interpolation est nécessaire, on applique la troisième propriété des lignes de niveau (**40**).

Lorsque l'approximation obtenue dans l'évaluation du moment ne paraîtra pas suffisante, on pourra recourir au calcul, lequel se trouvera très simplifié par l'emploi d'un tableau des valeurs des coefficients A, B, C correspondant à toutes les combinaisons de charges indiquées par l'épure.

On cherchera sur l'épure la position du point représentant la section dans laquelle on veut calculer le moment de flexion; ce point tombera dans une région du plan qui porte des indices (i, k, n) fixant la composition du convoi et la charge principale. Le tableau des constantes A, B et C fournira les valeurs numériques de ${}_iA_n$, $\overset{k}{B}_n$ et ${}_i\overset{k}{C}$, et par la formule (12) on aura

$$(12)\qquad {}_i\overset{k}{M}_n = {}_iA_n \frac{x(l-x)}{l} - \overset{k}{B}_n \frac{x}{l} - {}_i\overset{k}{C}\,\frac{l-x}{l}.$$

On connaît la portée l de la poutre et l'abscisse x de la section ; on aura donc immédiatement la valeur du moment.

Dans le cas où une charge uniformément répartie, d'une intensité p par unité de longueur, vient s'ajouter aux charges roulantes, l'expression du moment de flexion est

$$(74)\qquad M = \left({}_iA_n + \frac{pl}{2}\right)\frac{x(l-x)}{2} - \overset{k}{B}_n \frac{x}{l} - {}_i\overset{k}{C}\,\frac{l-x}{l}.$$

La seule modification consiste donc à remplacer ${}_iA_n$ par la somme $\left({}_iA_n + \frac{pl}{2}\right)$.

46. ***Moment maximum maximorum.*** — Dans une poutre de portée l, et avec une combinaison de charges caractérisée par les trois indices i, k, n, le moment maximum maximorum se produit dans une section dont l'abscisse x'' satisfait à l'équation (72); on a par suite

$$(75)\qquad x'' = \frac{l}{2} - \frac{\overset{k}{B}_n - {}_i\overset{k}{C}}{2\,{}_iA_n}.$$

En portant cette valeur de l'abscisse dans l'expression (12) du moment, on obtient pour le moment maximum maximorum ${}_i\overset{k}{M}{}_n''$:

$$(76)\qquad {}_i\overset{\kappa}{M}{}_n'' = {}_iA_n \frac{l}{4} - \frac{\overset{\kappa}{B}_n + {}_i\overset{\kappa}{C}}{2} + \frac{\left(\overset{\kappa}{B}_n - {}_i\overset{\kappa}{C}\right)^2}{4\,{}_iA_n l}.$$

Lorsque la poutre porte en outre une charge uniformément répartie sur toute sa longueur, il faut remplacer ${}_iA_n$ par $\left({}_iA_n + \frac{pl}{2}\right)$ dans les formules (75) et (76).

§ 6. — CALCUL DES PIÈCES DE PONT

47. — Lorsque les charges d'un convoi sont transmises aux maîtresses-poutres d'un pont par l'intermédiaire de pièces de pont et de longerons, on admet, dans le calcul ordinaire des pièces de pont, que les longerons sont discontinus et articulés à leurs extrémités. En continuant à accepter cette hypothèse, on peut déterminer les charges reportées sur les pièces de pont, à l'aide de l'épure des lignes de niveau des moments de flexion.

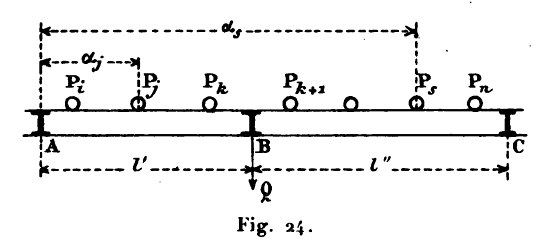


Fig. 24.

Soient (fig. 24) trois pièces de pont consécutives A, B, C, supportant des longerons AB, BC, lesquels reçoivent directement l'action des chargss roulantes. Le longeron AB porte les charges $P_i \ldots P_k$, et le longeron BC les charges $P_{k+1} \ldots P_n$; toutes ces charges peuvent être repérées par leurs distances α à la pièce de pont A. Il s'agit de déterminer la charge reportée sur la pièce de pont B.

En raison de l'hypothèse précédente, les charges situées en

arrière de A et en avant de C n'exercent aucune influence sur la pièce de pont B, et la charge Q que celle-ci reçoit est égale en valeur absolue à la somme des réactions, sur leur appui commun B, des deux longerons AC et BC. Donc

$$(77) \qquad Q = \frac{1}{l'} \sum_{j=i}^{j=K} P_j \alpha_j + \frac{1}{l''} \sum_{s=K+1}^{s=n} P_s (l' + l'' - \alpha_s).$$

Considérons maintenant (fig. 25) une poutre fictive A′C′ dont la portée l serait égale à la somme des deux travées l' et l'' des deux longerons AB et BC. Plaçons sur cette poutre les charges

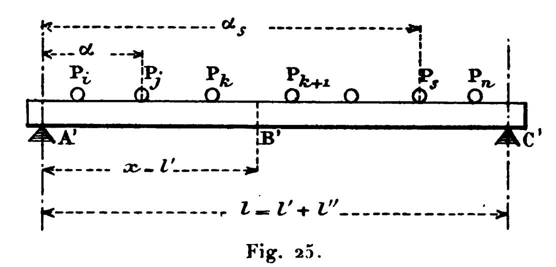


Fig. 25.

P_i... P_n ci-dessus, de façon qu'elles occupent, par rapport aux appuis A′ et C′, la même position que par rapport aux pièces de A et C ; puis déterminons le moment de flexion développé dans la section B′ qui aurait une abscisse x égale à l'.

L'expression de ce moment serait

$$M = \frac{l - x}{l} \sum_{j=i}^{j=K} P_j \alpha_j + \frac{x}{l} \sum_{s=K+1}^{s=n} P_s (l - \alpha_s)$$

ou bien, en remplaçant l par $l' + l''$ et x par l' :

$$(78) \qquad M = \frac{l''}{l' + l''} \sum_{j=i}^{j=K} P_j \alpha_j + \frac{l'}{l' + l''} \sum_{s=K+1}^{s=n} P_s (l' + l'' - \alpha_2),$$

En rapprochant l'une de l'autre les équations (77) et (78), on en déduit

$$(79) \qquad Q = \frac{l' + l''}{l' l''} M.$$

Donc, *le maximum de la réaction totale Q est proportionnel au maximum du moment M, et il se produit dans les mêmes conditions.* (Proposition due à M. Bertrand de Fontviolant.)

L'épure des moments fournira le maximum de M au point pour lequel on a

$$x = l' \text{ (si } l' < l'') \quad \text{ou} \quad x = l'' \text{ (si } l' > l'')$$
$$\text{et } l = l' + l''.$$

La formule (79) fera ensuite connaître le maximum de la réaction cherchée Q.

L'épure montre encore quelles sont les charges qu'il faut placer sur les longerons et quelle est leur position. Il est à peine nécessaire de faire remarquer qu'il doit toujours y avoir une charge à l'aplomb de la pièce de pont B.

Dans le cas particulier et très général où $l' = l''$, on a

$$x = \frac{l}{2}$$

et le point représentatif de la section se trouve sur la ligne des milieux des travées ($t = 1$). De plus, la formule (79) se simplifie et devient

(80) $$Q = \frac{2M}{l'}.$$

DEUXIÈME PARTIE

APPLICATIONS

AUX SURCHARGES DU RÈGLEMENT DU 29 AOUT 1891 SUR LES PONTS MÉTALLIQUES

CHAPITRE PREMIER

PONTS SUPPORTANT DES VOIES DE FER

§ I. — ABAQUES DES EFFORTS TRANCHANTS (VOIES DE LARGEUR NORMALE)

48. — Les surcharges imposées pour le calcul des ponts métalliques supportant des voies de largeur normale comprennent :

1° Un essieu isolé de 20 tonnes ;

2° Un train-type dont les éléments sont définis par le *tableau I*.

L'abaque (Pl. I) fait connaître les efforts tranchants maximums dans toutes les sections des poutres dont la portée peut atteindre 80 mètres. Il est divisé, pour des convenances d'échelles, en trois parties : la première convient aux portées égales ou inférieures à 10 mètres ; la seconde comprend les portées comprises entre 10 et 40 mètres ; la troisième est applicable aux portées variant de 40 à 80 mètres.

49. — On trouve d'abord sur l'abaque un réseau quadrillé coté — horizontalement suivant les valeurs des *demi-portées* y — verticalement suivant les valeurs *des distances* x *des sections à l'appui le plus rapproché*. D'après le Règlement, les convois pou-

vant circuler dans les deux sens (au moins pour les épreuves), il suffit d'obtenir les efforts tranchants dans la moitié de la longueur d'une poutre donnée. Les droites horizontales qui limitent les diagrammes sont les lignes des appuis, et les droites à 45° correspondent aux sections des milieux des poutres.

L'abaque est divisé en plusieurs régions par des lignes droites généralement parallèles entre elles; la première région, qui est triangulaire, est relative à la roue isolée de 10 tonnes. Sauf deux exceptions, les autres régions portent chacune un numéro qui indique le nombre des charges du train engagées sur la poutre, au moment où l'effort tranchant atteint son maximum; *la roue de tête est alors à l'aplomb de la section, et les autres charges sont distribuées du côté de l'appui le plus éloigné.*

Deux régions particulières sont affectées, l'une des deux numéros 7-13, l'autre des trois numéros 6-7-13. En tout point de la région 7-13, l'effort tranchant est maximum quand le train comprend les charges n°s 7 à 13 inclusivement, et que la charge n° 7 est à l'aplomb de la section. Pour la région 6-7-13, le convoi engagé sur la poutre comporte les charges n°s 6 à 13, et l'effort tranchant est maximum sous la roue n° 7.

Sur l'abaque sont tracées de nombreuses *lignes de niveau cotées en tonnes* dans l'hypothèse où les poutres supportent directement *une file de roues* du train; ce sont des lignes droites dans chacune des régions de l'épure. Afin de ne pas multiplier les écritures, on a coté seulement un certain nombre de lignes de niveau; mais celles-ci sont assez rapprochées pour qu'on puisse obtenir sans hésitation la valeur de l'effort tranchant le long d'une ligne quelconque.

50. — Un exemple fera comprendre la simplicité du fonctionnement de l'abaque.

On donne une poutre de 12 mètres de portée; quel est l'effort tranchant maximum dans une section située à 2 mètres de l'un des appuis, et dans quelles circonstances le maximum est-il atteint? — Il faut d'abord trouver sur l'abaque le point qui représente la section donnée; c'est celui qui a pour coordonnées $x = 2$ mètres et $y = \frac{12}{2} = 6$ mètres. Ce point tombe très près

de la ligne de niveau dont la cote est 20; l'effort tranchant cherché est donc sensiblement égal à 20 tonnes. Le même point appartient à la région qui porte le numéro 5; donc l'effort tranchant est maximum quand le convoi partiel engagé sur la poutre comprend les cinq premières charges du train-type, et que la charge n° 1 arrive à l'aplomb de la section.

Pour apprécier la valeur de l'effort tranchant en un point compris entre deux lignes de niveau, on utilisera la propriété démontrée au n° 23 (3°) : *les lignes de niveau d'une même région découpent, sur les verticales de l'abaque, des segments proportionnels à leurs intervalles.* Le plus souvent une interpolation *de visu* sera suffisante.

51. — Si l'on veut obtenir le diagramme complet des efforts tranchants maximums dans une demi-travée, on peut déterminer les valeurs des efforts en un grand nombre de sections; mais on arrive plus simplement et plus exactement au but par la remarque suivante, qui n'est qu'une conséquence de la propriété invoquée plus haut : *D'une section à une autre d'une même poutre et appartenant à la même région, l'effort tranchant maximum varie suivant les ordonnées d'une ligne droite.* Il suffit donc de déterminer les efforts tranchants en *deux* points de chaque région traversée par la verticale correspondant à la portée de la poutre; on choisira naturellement les points pour lesquels les lectures seront le plus faciles.

52. — L'approximation avec laquelle l'abaque fournit l'évaluation des efforts tranchants paraît bien suffisante dans la pratique; toutefois, nous donnons le moyen d'obtenir immédiatement les expressions de ces efforts, pour les cas où l'on voudrait recourir au calcul.

En désignant par l la portée de la poutre, et par x l'abscisse de la section $\left(x < \frac{l}{2}\right)$, on a les relations suivantes entre ces deux quantités et l'effort tranchant T exprimé en tonnes :

1° Dans toute l'étendue de la région de l'abaque, relative à la roue de 10 tonnes;

(81) $$Tl = 10\,(l - x).$$

2° Dans les régions qui portent les n°s 7-13 et 6-7-13,

$$\text{(82)} \qquad \mathrm{T}l = 44(l - x) - 220{,}6 \quad \text{(région 7-13)}$$

$$\text{(83)} \qquad (\mathrm{T}+6)\,l = 50\,(l - x) - 193 \quad \text{(région 6-7-13)}.$$

3° Dans une région autre que l'une des trois précédentes et qui porte le n° n, on a

$$\text{(84)} \qquad \mathrm{T}l = {}_1\mathrm{A}_n\,(l - x) - \overset{1}{\mathrm{B}}_n.$$

Les coefficients ${}_1\mathrm{A}_n$ et $\overset{1}{\mathrm{B}}_n$ sont des constantes générales du train-type, dont les valeurs sont indiquées au tableau I, vis-à-vis des valeurs de n.

Par exemple, l'équation pour la région affectée du n° 8 sera

$$\mathrm{T}l = 54\,(l - x) - 386{,}4.$$

§ 2. — ABAQUES DES MOMENTS DE FLEXION (VOIES DE LARGEUR NORMALE)

53. — Cet abaque (Pl. II) donne les moments de flexion maximums dans toutes les sections comprises entre un appui et le milieu des poutres, jusqu'à 80 mètres de portée.

Afin d'éclaircir un peu l'épure, on a représenté à part les moments relatifs aux poutres dont la portée est égale ou inférieure à 20 mètres.

54. — Les indications de l'abaque permettant de trouver le point représentatif de la section d'une poutre sont :

1° *Les distances* x *des sections à l'appui le plus rapproché.* — Ces distances sont graduées parallèlement à une oblique dans le grand diagramme, et parallèlement à une verticale dans le petit;

2° *Les lignes d'égale portée.* — Ces lignes sont des hyperboles, et elles sont tracées de mètre en mètre jusqu'à 20 mètres de portée, et de 2 mètres en 2 mètres au delà.

Toutes les lignes d'égale portée sont issues d'un point fixe, qui est le *pôle des appuis*.

Les horizontales, qui limitent les diagrammes, sont les *lignes des milieux des travées*, parce qu'elles renferment tous les points qui représentent les sections dont l'abscisse est égale à la moitié de la portée.

Une section étant déterminée par sa distance x_1 à l'appui le plus voisin de la poutre de portée l_1 à laquelle elle appartient, le point correspondant de l'abaque est le point de l'hyperbole de portée l_1 dont l'abscisse est égale à x_1. Si la portée particulière que l'on étudie n'est pas représentée sur l'abaque, on peut faire l'interpolation par l'application de la règle suivante (32 et 34) : *les lignes d'égale portée partagent les horizontales de l'abaque en parties proportionnelles.*

55. — L'abaque est divisé en surfaces polygonales ou *régions* jouissant des propriétés suivantes :

1° En tout point d'une même région, le moment de flexion devient maximum pour une même composition du convoi partiel engagé sur la poutre, et sous la même roue de ce convoi ;

2° D'une section à une autre d'une même poutre, et appartenant à une même région, le moment de flexion varie suivant les ordonnées d'une parabole.

Chaque région (hormis la première qui est relative à la roue isolée de 10 tonnes) est désignée par trois numéros $i - k - n$; cela signifie qu'il faut, pour obtenir le moment maximum, placer la roue n° k à l'aplomb de la section, distribuer les roues nos $i \ldots . k - 1$ du côté de l'appui le plus rapproché, et les roues nos $k + 1 \ldots . . n$ du côté de l'appui le plus éloigné.

Il n'est pas sans intérêt de remarquer que trois régions adjacentes ont toujours un point commun. Donc, dans certaines sections de poutres de portées particulières, le moment de flexion acquiert son maximum indifféremment avec trois compositions ou positions distinctes du train. Enfin, pour des points en plus petit nombre, on trouve que quatre combinaisons différentes de charges produisent le même moment de flexion.

56. — Les *lignes de niveau* sont cotées en *tonnes-mètres pour une file de roues.* Elles sont assez rapprochées pour permettre d'apprécier immédiatement en un point quelconque la valeur du moment de flexion. On pourrait d'ailleurs faire l'interpolation en

observant (40-3e) que *les horizontales de l'abaque sont partagées, par les lignes de niveau, en parties proportionnelles aux intervalles de ces lignes.*

Exemple. Le point défini par $x = 27$ mètres et $l = 60$ mètres tombe entre les lignes de niveau 990 et 995; on peut estimer que le moment de flexion y a une valeur très voisine de 993 tonnes-mètres. Ce point appartient à la région 1 — 8 — 19; donc le moment est maximum quand le train engagé sur la poutre comprend les charges nos 1 à 19 inclus, la roue no 8 étant à l'aplomb de la section, la roue no 1 du côté de l'appui le plus voisin, et la roue no 19 du côté de l'appui le plus éloigné.

57. — On trouve encore sur l'abaque des lignes courbes pointillées indiquant le lieu des points où le moment est *maximum maximorum*. Il suffit en général, pour les petites portées, de connaître ce moment; on l'obtiendra donc immédiatement, et l'on saura dans quelles sections et dans quelles circonstances il se produit.

Ainsi, le point d'intersection de l'hyperbole de portée 16 mètres avec une pareille ligne a pour abscisse 7 m. 70, quantité lue sur l'abaque; on y lit de plus que le moment est alors égal à 105 tonnes-mètres. Enfin, les numéros 6 — 8 — 11 de la région qui renferme le point fixent la composition et la position du convoi partiel.

58. — L'abaque ne fournit pas les valeurs des moments de flexion avec la même approximation. Pour une travée déterminée, on obtiendra les moments avec une approximation variable : ils seront connus plus exactement dans les sections avoisinant le milieu de la travée. Du milieu vers l'appui, l'approximation diminue progressivement, et aux environs de l'appui il peut être assez difficile de bien faire les lectures. Mais il n'y a à cela aucun inconvénient dans la pratique, car on n'a pas besoin de connaître avec précision les faibles valeurs des moments près des appuis. La loi que suit l'approximation, dont l'abaque est susceptible, est donc bien conforme aux desiderata de la pratique.

59. — Les numéros de la région dans laquelle tombe le point représentatif d'une section donnée, permettent d'obtenir rapide-

ment l'expression du moment M en fonction de l'abscisse x et de la portée l. Les coefficients de l'équation sont invariables pour une même région.

1° Pour la roue isolée de 10 tonnes, on a, *en supposant le moment exprimé en tonnes-mètres,*

$$(85) \qquad M = 10 \frac{x(l-x)}{l}.$$

2° Dans une région quelconque, caractérisée par les n^os^ $i - k - n$, le moment de flexion a pour expression

$$(86) \qquad M = {}_iA_n \frac{x(l-x)}{l} - \overset{k}{B}_n \frac{x}{l} - {}_i\overset{k}{C} \frac{l-x}{l}.$$

Les coefficients de cette équation sont les constantes du convoi partiel $P_i \ldots P_k \ldots P_n$, et leurs valeurs sont inscrites au *tableau II*.

Par exemple, dans la région 6 — 8 — 11, on a

$$M = 40 \frac{x(l-x)}{l} - 67{,}2 \frac{x}{l} - 43{,}2 \frac{l-x}{l}.$$

3° Le *moment maximum maximorum*, lorsque le système des charges est défini par les n^os^ $i - k - n$, s'exprime par

$$(87) \qquad M'' = {}_iA_n \frac{l}{4} - \frac{\overset{k}{B}_n + {}_i\overset{k}{C}}{2} + \frac{\left(\overset{k}{B}_n - {}_i\overset{k}{C}\right)^2}{4\,{}_iA_n\, l}$$

et il a lieu dans une section dont l'abscisse a pour valeur

$$(88) \qquad x'' = \frac{l}{2} - \frac{\overset{k}{B}_n - {}_i\overset{k}{C}}{2\,{}_iA_n}.$$

Exemple. Dans la région 1 — 2 — 4 on a

$${}_1A_4 = 28 \qquad \overset{2}{B}_4 = 25{,}2 \qquad {}_1\overset{2}{C} = 8{,}4$$

d'où

$$M'' = 7\,l - 16{,}8 + \frac{2{,}52}{l}$$

$$x'' = \frac{l}{2} - 0^m{,}300.$$

§ 3. — SURCHARGES POUR VOIES DE 1 MÈTRE DE LARGEUR

60. — Les surcharges réglementaires pour voies ferrées de 1 mètre de largeur comprennent :

1° Un essieu isolé de 14 tonnes;

2° Un train-type dont on trouvera les éléments dans le *tableau III.*

L'abaque des efforts tranchants (Pl. III) et celui des moments de flexion (Pl. IV) sont établis pour les poutres dont la portée peut atteindre 80 mètres, et dans l'hypothèse que ces poutres portent directement une file de roues du train.

La disposition de ces abaques est identique à celle des abaques relatifs aux surcharges de la voie normale; et, quant à leur usage pour la détermination des efforts, il y a lieu de suivre exactement la même méthode.

61. — Voici les expressions des efforts tranchants développés par les surcharges relatives aux voies de 1 mètre de largeur. Ces efforts sont exprimés en tonnes, et pour une file de roues.

1° Dans toute l'étendue de la région concernant la roue isolée de 7 tonnes, on a

(89) $$Tl = 7\,(l - x).$$

2° Dans les régions qui portent les numéros 7 — 13 et 6 — 7 — 13, les expressions sont

(90) $$Tl = 32\,(l - x) - 164{,}4 \text{ (région 7-13)}$$

(91) $$(T + 4)\,l = 36\,(l - x) - 148 \text{ (région 6-7-13)}.$$

3° Pour une région affectée du numéro n, il faut appliquer la formule (84), et l'on trouvera dans le *tableau III* les valeurs des constantes générales qui constituent les coefficients de cette équation.

62. — Lorsque le moment de flexion est maximum sous la

roue isolée de 7 tonnes, il est exprimé en tonnes-mètres par

(92) $$M = 7 \frac{x(l-x)}{l}.$$

Dans tous les autres cas, il convient d'appliquer les formules (86), (87) et (88); les valeurs de leurs coefficients font l'objet du *tableau IV*. Ces coefficients sont calculés dans l'hypothèse du passage d'une file de roues sur la poutre.

CHAPITRE II

PONTS SUPPORTANT DES VOIES DE TERRE

63. — Les surcharges roulantes réglementaires pour les ponts-routes sont de plusieurs sortes :

1° Des files de tombereaux de 6 tonnes à un essieu, traînés par 2 chevaux, dont les poids et dimensions sont indiqués sur le croquis ci-après (fig. 26) :

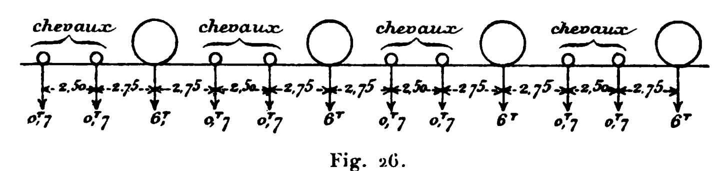


Fig. 26.

2° Un tombereau de 11 tonnes à un essieu, traîné par 5 chevaux et intercalé dans une file de tombereaux de 6 tonnes, ce qui conduit à un convoi dont la disposition est la suivante (fig. 27) :

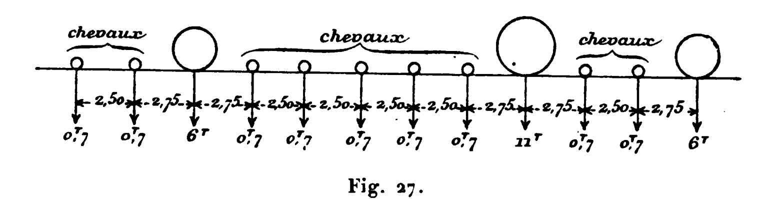


Fig. 27.

3° Des files de chariots de 16 tonnes à deux essieux, traînés par 8 chevaux et disposés comme l'indique le croquis ci-après (fig. 28) :

Pour tous ces véhicules, la largeur de la voie est 1 m. 70, et chaque file occupe une largeur de chaussée de 2 m. 25.

La limite du travail du métal, par millimètre carré, peut être

de 1 kilogramme plus élevée avec les deux derniers types de surcharges que dans le cas des tombereaux de 6 tonnes.

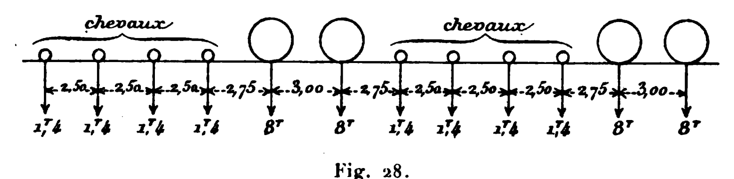


Fig. 28.

64. — Les abaques des efforts tranchants et des moments fléchissants sont disposés comme ceux relatifs aux surcharges pour voies ferrées.

Les planches V et VI donnent les abaques pour les tombereaux de 6 tonnes.

Les deux autres sortes de surcharge, tombereau de 11 tonnes et chariots de 16 tonnes, ont été étudiées ensemble, parce qu'elles admettent une même limite du travail. La planche VII fournit les efforts tranchants, la planche VIII les moments de flexion développés par ces deux sortes de surcharges. Les abaques fixent les régions d'influence pour chacune d'elles.

L'usage de ces différents abaques est identique à celui des abaques relatifs aux surcharges pour voies ferrées. Il n'y a de différences que dans le *numérotage des régions*, et dans la forme des *tableaux* qui permettent d'obtenir les expressions des efforts tranchants ou fléchissants.

§ I. — TOMBEREAUX DE 6 TONNES

65. — Le *tableau V* donne d'abord les éléments d'un convoi de tombereaux de 6 tonnes. Il présente ceci de particulier que la charge en tête du tableau est la moitié du poids d'un essieu de tombereau, et qu'on lui a donné le numéro zéro. Le convoi auquel se rapporte le tableau présente donc la disposition indiquée par la figure 29 ; la charge de tête P_0 vaut 3 tonnes, et le numéro n d'une charge quelconque marque aussi le nombre des charges situées à droite de la charge P_0.

Les constantes de ce convoi sont :

1° Les sommes des intensités des charges constituant les convois partiels tels que P_0, P_1,... P_n ; ces sommes ne dépendent que de l'indice *n*, et elles sont désignées dans le tableau par A_n ;

2° Les sommes des moments des charges P_1,... P_n par rapport à la charge de tête P_0; elles sont définies par l'indice *n* de la dernière charge, et elles sont appelées B_n.

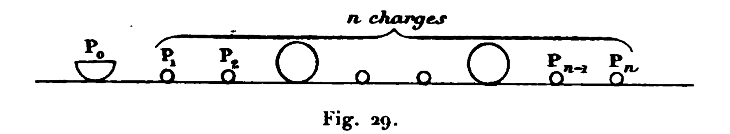


Fig. 29.

66. — En étudiant le convoi formé de tombereaux de 6 tonnes et de leurs attelages, nous avons trouvé que la *charge principale* était toujours un essieu de tombereau, c'est-à-dire qu'il fallait toujours placer un essieu de tombereau à l'aplomb d'une section de la poutre, pour obtenir dans cette section l'effort tranchant maximum ou le moment de flexion maximum. Cette charge principale peut être considérée comme formée par la juxtaposition de deux charges P_0 du convoi auquel se rapporte le tableau V.

Le convoi partiel engagé sur la poutre comprend en outre

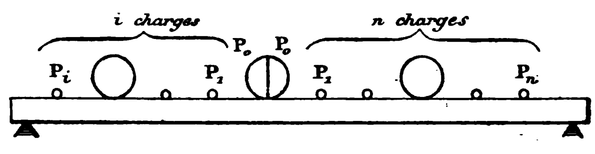


Fig. 30.

(fig. 30) : *i* charges à gauche, et *n* charges à droite de la section, cette section étant supposée appartenir à la moitié de gauche de la poutre.

Dans ces conditions, la *somme des intensités des charges* du convoi partiel sera

$$A_i + A_n;$$

les *sommes des moments des charges par rapport à la charge principale* seront B_n pour les *n* charges situées à droite de cette charge, et B_i pour les *i* charges situées à gauche de la même charge ;

les valeurs des quantités A_i, A_n, B_n et B_i étant prises dans le tableau V.

67. ***Efforts tranchants.*** — Pour une section de la première moitié d'une poutre, l'effort tranchant est maximum lorsqu'il n'y a aucune charge à gauche de la charge principale $2P_o$ (fig. 31).

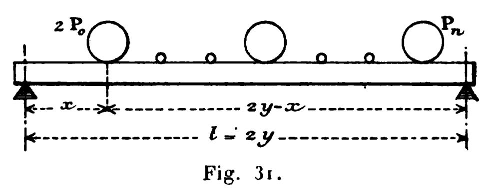


Fig. 31.

La formule générale (38) de l'effort tranchant devient ici, avec les nouvelles notations,

$$2\,Ty = (P_o + A_n)(2y - x) - B_n$$

ou, puisque $P_o = 3^t$ et $2y = l$,

$$\text{(93)} \qquad Tl = (3 + A_n)(l - x) - B_n.$$

Le numéro donné à une région quelconque de l'abaque représente le nombre total des charges du convoi, y compris la charge principale; il est donc égal à $n + 1$. Ce numéro permettra d'obtenir immédiatement les valeurs des coefficients A_n et B_n de l'équation (93), et de définir la composition du convoi.

Exemple. On donne $l = 26$ mètres, et $x = 4$ mètres ; on en déduit $y = \frac{l}{2} = 13$ mètres. Le point correspondant de l'abaque tombe dans la région qui porte le n° 9, et le tableau V donne, en prenant $n = 9 - 1 = 8$,

$$A_8 = 19^t{,}2 \qquad \text{et} \qquad B_8 = 194^{tm}{,}4.$$

Par suite, l'expression de l'effort tranchant en ce point sera, d'après l'équation (93),

$$T \times 26 = (3 + 19{,}2) \times (26 - 4) - 194{,}4$$

d'où

$$T = 11^t,308.$$

On aurait lu sur l'abaque : $T = 11^t,3$.

68. ***Moments de flexion.*** — La composition du convoi partiel est celle représentée sur la figure 30, page 76. Une région quelconque de l'abaque porte deux numéros $i - n$ signifiant que le convoi comprend i charges entre la section et l'appui le plus rapproché, et n charges entre la section et l'appui qui en est le plus éloigné.

L'expression (12) du moment de flexion se transforme en la suivante :

$$(94) \qquad M = (A_i + A_n)\frac{x(l - x)}{l} - \frac{x}{l}B_n - \frac{l - x}{l}B_i.$$

Les coefficients A_i, A_n, B_n et B_i sont donnés par le tableau V.

Ainsi, pour la région 5-6, on a

$$A_5 = 11,8 \qquad B_5 = 166,4$$
$$A_6 = 17,8 \qquad B_6 = 179,525$$

d'où

$$M = 29,6\frac{x(l - x)}{l} - 179,525\frac{x}{l} - 166,4\frac{l - x}{l}.$$

Dans la même région, le moment de flexion maximum maximorum aurait pour expression, en appliquant la formule (76),

$$M'' = 29,6\frac{l}{4} - \frac{179,525 + 166,4}{2} + \frac{(179,525 - 166,4)^2}{4 \times 29,6 \times l}$$
$$= 7,4\,l - 172,9625 + \frac{1,4549}{l}$$

et il aurait lieu dans une section dont l'abscisse serait

$$x'' = \frac{l}{2} - \frac{179,525 - 166,4}{2 \times 29,6} = \frac{l}{2} - 0^m,2217.$$

§ 2. — TOMBEREAU DE 11 TONNES

69. — L'abaque des *efforts tranchants*, planche VII, ne comprend que deux régions relatives au tombereau de 11 tonnes.

La première porte l'indication « *essieu de 11 tonnes* » ; il n'y a que cet essieu dans la travée, et il doit être placé à l'aplomb de la section. L'expression correspondante de l'effort tranchant est

$$\text{(95)} \qquad \mathrm{T}l = 11\,(l - x).$$

Sur la seconde région est inscrite la mention « *essieu de 11 tonnes et 1 cheval* », qui marque la composition du convoi engagé sur la poutre ; l'essieu doit toujours être placé à l'aplomb de la section, et le cheval du côté de l'appui le plus éloigné. L'expression de l'effort tranchant est alors

$$\text{(96)} \qquad \mathrm{T}l = 11{,}7\,(l - x) - 1{,}925.$$

70. — Sur l'abaque des *moments de flexion*, planche VIII, il n'y a que trois régions concernant le tombereau de 11 tonnes ; elles portent chacune deux numéros qui sont respectivement

0 — 0 0 — 1 1 — 1

L'essieu de 11 tonnes est toujours charge principale ; le numéro de gauche indique combien de charges il faut placer entre la section et l'appui le plus voisin, le numéro de droite combien il y en a entre la section et l'appui le plus éloigné, non compris la charge principale.

Les expressions du moment de flexion sont :

1° Dans la région 0 — 0

$$\text{(97)} \qquad \mathrm{M} = 11\,\frac{x\,(l - x)}{l}$$

2° Dans la région 0 — 1

$$\text{(98)} \qquad \mathrm{M} = 11{,}7\,\frac{x\,(l - x)}{l} - 1{,}925\,\frac{x}{l}$$

3° Dans la région 1 — 1

(99)
$$M = 12,4\frac{x(l-x)}{l} - 1,925.$$

§ 3. — CHARIOTS DE 16 TONNES

71. — Les *tableaux VI et VII* donnent les éléments de deux convois spéciaux obtenus avec des chariots de 16 tonnes.

Le convoi auquel se rapporte le *tableau VI* comprend en queue les deux essieux d'un chariot, comme l'indique la figure 32, et les charges sont numérotées de la queue à la tête. Le premier

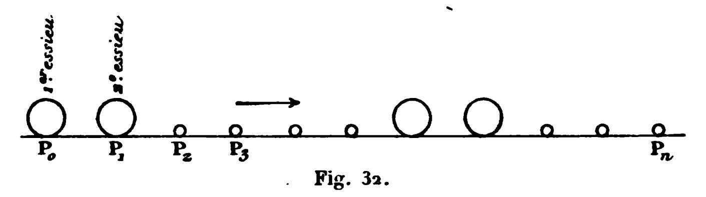


Fig. 32.

essieu du chariot a le n° 0, le second le n° 1, et ainsi de suite; de sorte que l'indice n d'une charge quelconque marque combien il y a de charges en plus du premier essieu.

Les constantes de ce convoi sont :

1° La *somme* A_n *des intensités* de toutes les charges pour chaque valeur de n,

$$A_n = P_0 + P_1 + \dots + P_n$$

2° La *somme* B_n *des moments* des charges P_1, P_2..... P_n par rapport au point d'application de la charge P_0.

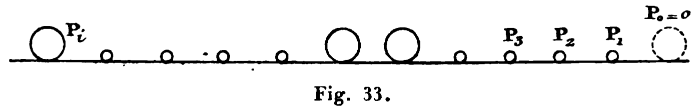


Fig. 33.

Le *tableau VII* est relatif à un convoi dont la tête est constituée par un attelage de chariot; les charges de ce convoi sont repérées par leurs distances, non pas à la charge de tête, mais à une charge fictive P_0 d'une intensité nulle, et qui occuperait par rapport au premier couple des chevaux de l'attelage la position du

dernier essieu d'un chariot qui le précéderait (fig. 33). Les charges sont numérotées de la tête à la queue ; le numéro i d'une charge quelconque indique le nombre total des charges effectives du convoi.

Les constantes de ce convoi sont, pour chaque valeur de i :

1° La *somme* A_i *des intensités* des charges,

$$A_i = P_0 + P_1 + \ldots + P_i$$

2° La *somme* B_i *des moments* des charges P_1, P_2. . . . . P_i par rapport au point d'application de la charge P_0.

72. ***Efforts tranchants.*** — L'effort tranchant est toujours maximum quand le premier essieu d'un chariot est disposé à l'aplomb de la section (fig. 34). Le convoi est alors composé comme celui auquel se rapporte le *tableau VI.*

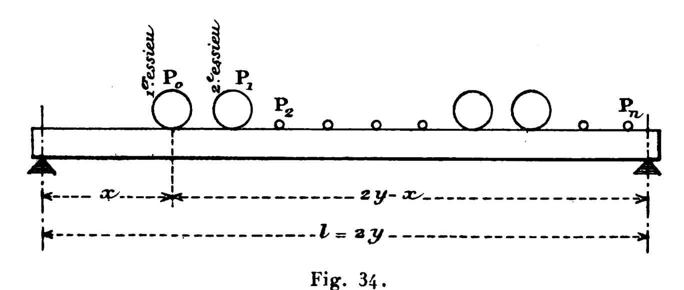


Fig. 34.

Si n est l'indice de la charge extrême du convoi partiel, la formule générale (38) de l'effort tranchant s'écrira ici

$$2\,Ty = A_n\,(2\,y - x) - B_n$$

ou

$$(100) \qquad Tl = A_n\,(l - x) - B_n$$

les coefficients A_n et B_n étant à lire dans le tableau VI.

Les numéros dont sont affectées les régions de l'abaque, planche VII, indiquent le nombre total des charges constituant le convoi partiel ; ils représentent donc $n + 1$. Par exemple, dans

la région n° 10, il faut prendre $n = 9$, d'où à l'aide du tableau VI

$$A_9 = 40,4 \qquad \text{et} \qquad B_9 = 421,6$$

et

$$Tl = 40,4\,(l - x) - 421,6$$

pour expression de l'effort tranchant dans cette région.

73. ***Moments de flexion.*** — Le moment de flexion est maximum tantôt sous le premier essieu d'un chariot, tantôt sous le second essieu.

Premier cas. — Lorsque le premier essieu d'un chariot est charge principale, le convoi partiel engagé sur la poutre présente la disposition indiquée par la figure 35; il comprend i charges entre la section et l'appui le plus rapproché, et n charges entre la section et l'appui le plus éloigné. Ce convoi peut être consi-

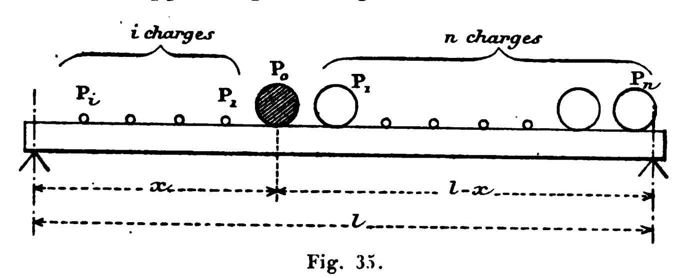


Fig. 35.

déré comme obtenu par la juxtaposition de deux tronçons des convois définis par les tableaux VI et VII, et soudés entre eux par leurs charges P_0.

Si l'on évalue A_n et B_n à l'aide du tableau VI, et A_i et B_i à l'aide du tableau VII, la somme des intensités de toutes les charges du convoi partiel considéré sera $A_i + A_n$; B_n sera la valeur absolue de la somme des moments des n charges de droite par rapport à la charge principale; B_i la somme des moments des i charges de gauche.

Par suite, l'expression (12) du moment de flexion devient

$$(101) \qquad M = (A_i + A_n)\frac{x\,(l - x)}{l} - B_n\frac{x}{l} - B_i\frac{l - x}{l}.$$

Les régions de l'abaque, planche VIII, qui répondent au cas où le premier essieu d'un chariot est charge principale, sont affectées des trois numéros $i - 1 - n$, le numéro intermédiaire étant toujours 1. Le numéro i est le premier de la région, le numéro n en est le troisième; ils ont les significations que nous venons de leur attribuer (fig. 35), et ils permettent de trouver dans les tableaux VI et VII les valeurs des coefficients de l'équation (101).

Ainsi, pour tout point de la région 6 — 1 — 9, on doit prendre

Dans le tableau VI : $A_9 = 40{,}4$ et $B_9 = 421{,}6$

Dans le tableau VII : $A_6 = 21{,}6$ et $B_6 = 268{,}4$

et l'on a pour expression du moment de flexion

$$M = 62 \frac{x(l-x)}{l} - 421{,}6 \frac{x}{l} - 268{,}4 \frac{l-x}{l}.$$

Deuxième cas. — Le second essieu d'un chariot étant charge principale, le convoi engagé sur la poutre est disposé comme l'indique la figure 36. On voit que ce convoi partiel peut encore être obtenu en soudant bout à bout deux tronçons des convois spéciaux dont les tableaux VI et VII donnent la composition.

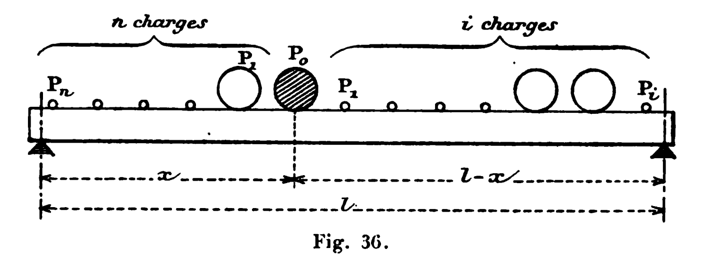


Fig. 36.

Mais ici il y a n charges entre la section et l'appui le plus rapproché, et i charges entre la section et l'appui le plus éloigné, non compris la charge principale.

Par suite, l'expression du moment de flexion sera

$$(102) \qquad M = (A_i + A_n) \frac{x(l-x)}{l} - B_i \frac{x}{l} - B_n \frac{l-x}{l}.$$

Les régions de l'abaque, qui correspondent au cas où le second essieu d'un chariot est charge principale, sont affectées des trois numéros $n - 2 - i$, le numéro intermédiaire étant toujours 2; le numéro n est le premier de la région, et le numéro i en est le troisième. Avec ces notations des régions, les valeurs des coefficients A_n et B_n de l'équation (102) sont encore à prendre dans le tableau VI, et celles des coefficients A_i et B_i dans le tableau VII.

Par exemple, pour la région 5 — 2 — 8, on doit prendre

Dans le tableau VI : $A_5 = 21,6$ et $B_5 = 77,2$

Dans le tableau VII : $A_8 = 24,4$ et $B_8 = 324,4$

d'où, pour expression du moment de flexion,

$$M = 46 \frac{x(l-x)}{l} - 324,4 \frac{x}{l} - 77,2 \frac{l-x}{l}.$$

TABLEAU I

Train-type pour voies de largeur normale.

ÉLÉMENTS DU TRAIN-TYPE					CONSTANTES GÉNÉRALES DU TRAIN-TYPE					
VÉHICULES	NUMÉROS des charges n	INTENSITÉS des charges P_n	DISTANCES à la charge P_1 a_n	ESPACEMENTS des charges $a_n - a_{n-1}$	NUMÉROS des charges n	SOMMES des intensités des charges ${}_1A_n$	SOMMES DES MOMENTS des charges par rapport à la charge P_1 ${}^1B_n$	SOMMES DES MOMENTS des charges par rapport à la charge P_n ${}_1^nC$	DISTANCES du centre de gravité à la charge P_1 b_n	DISTANCES du centre de gravité à la charge P_n c_n
		t	m	m		t	tm	tm	m	m
1re machine.	1	7	0,00		1	7	0,0	0,0	0,000	0,000
	2	7	1,20	1,20	2	14	8,4	8,4	0,600	0,600
	3	7	2,40	1,20	3	21	25,2	25.2	1,200	1,200
	4	7	3,60	1,20	4	28	50,4	50,4	1,800	1,800
1er tender.	5	6	8,20	4,60	5	34	99,6	179,2	2,9294	5,2706
	6	6	10,70	2,50	6	40	163,8	264,2	4,095	6,605
2e machine.	7	7	15,30	4,60	7	47	270,9	448,2	5,764	9,536
	8	7	16,50	1,20	8	54	386,4	504,6	7,1555	9,3445
	9	7	17,70	1,20	9	61	510,3	569,4	8,3656	9,3344
	10	7	18,90	1,20	10	68	642,6	642,6	9,450	9,450
				4,60						

2ᵉ tender.	11	6	23,50	2,50	11	74	783,6	955,4	10,5892	12,9108
	12	6	26	3,50	12	80	939,6	1 140,4	11,745	14,255
1ᵉʳ wagon.	13	4	29,50	3	13	84	1 057,6	1 420,4	12,5905	16,9095
	14	4	32,50	3	14	88	1 187,6	1 672,4	13,49545	19,00455
2ᵉ wagon.	15	4	35,50	3	15	92	1 329,6	1 936,4	14,452	21,048
	16	4	38,50	3	16	96	1 483,6	2 212,4	15,454	23,046
3ᵉ wagon.	17	4	41,50	3	17	100	1 649,6	2 500,4	16,496	25,004
	18	4	44,50	3	18	104	1 827,6	2 800,4	17,573	26,927
4ᵉ wagon.	19	4	47,50	3	19	108	2 017,6	3 112,4	18,6815	28,8185
	20	4	50,50	3	20	112	2 219,6	3 436,4	19,818	30,682
5ᵉ wagon.	21	4	53,50	3	21	116	2 433,6	3 772,4	20,9793	32,5207
	22	4	56,50	3	22	120	2 659,6	4 120,4	22,1633	34,3367
6ᵉ wagon.	23	4	59,50	3	23	124	2 897,6	4 480,4	23,3677	36,1323
	24	4	62,50	3	24	128	3 147,6	4 852,4	24,5906	37,9094
7ᵉ wagon.	25	4	65,50	3	25	132	3 409,6	5 236,4	25,8303	39,6697
	26	4	68,50	3	26	136	3 683,6	5 632,4	27,0853	41,4147
8ᵉ wagon.	27	4	71,50	3	27	140	3 969,6	6 040,4	28,3543	43,1457
	28	4	74,50	3	28	144	4 267,6	6 460,4	29,636	44,864
9ᵉ wagon.	29	4	77,50	3	29	148	4 577,6	6 892,4	30,9297	46,5703
	30	4	80,50		30	152	4 899,6	7 336,4	32,234	48,266

TABLEAU II. — TRAIN-TYPE POUR

Constantes des

iAn						
T.	T.	T.	Tm	Tm	Tm	Tm
${}_1A_2$ = 14	${}_1A_{20}$ = 112	${}_3A_{13}$ = 70	$\overset{1}{B}_2$ = 8,4	$\overset{1}{B}_{20}$ = 2 219,6	$\overset{2}{B}_{10}$ = 569,4	$\overset{2}{B}_{28}$ = 4 103,2
${}_1A_3$ = 21	${}_1A_{21}$ = 116		$\overset{1}{B}_3$ = 25,2	$\overset{1}{B}_{21}$ = 2 433,6	$\overset{2}{B}_{11}$ = 703,2	$\overset{2}{B}_{29}$ = 4 408,4
${}_1A_4$ = 28	${}_1A_{22}$ = 120	${}_4A_{13}$ = 63	$\overset{1}{B}_4$ = 50,4	$\overset{1}{B}_{22}$ = 2 659,6	$\overset{2}{B}_{12}$ = 852	$\overset{3}{B}_5$ = 43,2
${}_1A_5$ = 34	${}_1A_{23}$ = 124		$\overset{1}{B}_5$ = 99,6	$\overset{1}{B}_{23}$ = 2 897,6	$\overset{2}{B}_{13}$ = 965,2	$\overset{3}{B}_6$ = 93
${}_1A_6$ = 40	${}_1A_{24}$ = 128	${}_5A_{11}$ = 46	$\overset{1}{B}_6$ = 163,8	$\overset{1}{B}_{24}$ = 3 147,6	$\overset{2}{B}_{14}$ = 1 090,4	$\overset{3}{B}_7$ = 183,3
${}_1A_7$ = 47	${}_1A_{25}$ = 132	${}_5A_{12}$ = 52	$\overset{1}{B}_7$ = 270,9	$\overset{1}{B}_{25}$ = 3 409,9	$\overset{2}{B}_{15}$ = 1 227,6	$\overset{3}{B}_8$ = 282
${}_1A_8$ = 54	${}_1A_{26}$ = 136	${}_5A_{13}$ = 56	$\overset{1}{B}_8$ = 386,4	$\overset{1}{B}_{26}$ = 3 683,6	$\overset{2}{B}_{16}$ = 1 376,8	$\overset{3}{B}_9$ = 389,1
${}_1A_9$ = 61	${}_1A_{27}$ = 140		$\overset{1}{B}_9$ = 510,3	$\overset{1}{B}_{27}$ = 3 969,6	$\overset{2}{B}_{17}$ = 1 538	$\overset{3}{B}_{10}$ = 504,6
${}_1A_{10}$ = 68	${}_1A_{28}$ = 144	${}_6A_{11}$ = 40	$\overset{1}{B}_{10}$ = 642,6	$\overset{1}{B}_{28}$ = 4 267,6	$\overset{2}{B}_{18}$ = 1 711,2	$\overset{3}{B}_{11}$ = 631,2
${}_1A_{11}$ = 74	${}_1A_{29}$ = 148	${}_6A_{12}$ = 46	$\overset{1}{B}_{11}$ = 783,6	$\overset{1}{B}_{29}$ = 4 577,6	$\overset{2}{B}_{19}$ = 1 896,4	$\overset{3}{B}_{12}$ = 772,8
${}_1A_{12}$ = 80	${}_1A_{30}$ = 152	${}_6A_{13}$ = 50	$\overset{1}{B}_{12}$ = 939,6	$\overset{1}{B}_{30}$ = 4 899,6	$\overset{2}{B}_{20}$ = 2 093,6	$\overset{3}{B}_{13}$ = 881,2
${}_1A_{13}$ = 84			$\overset{1}{B}_{13}$ = 1 057,6	$\overset{2}{B}_3$ = 8,4	$\overset{2}{B}_{21}$ = 2 302,8	$\overset{3}{B}_{14}$ = 1 001,6
${}_1A_{14}$ = 88	${}_2A_{11}$ = 67	${}_7A_{13}$ = 44	$\overset{1}{B}_{14}$ = 1 187,6	$\overset{2}{B}_4$ = 25,2	$\overset{2}{B}_{22}$ = 2 524	$\overset{3}{B}_{15}$ = 1 134
${}_1A_{15}$ = 92	${}_2A_{12}$ = 73		$\overset{1}{B}_{15}$ = 1 329,6	$\overset{2}{B}_5$ = 67,2	$\overset{2}{B}_{23}$ = 2 757,2	$\overset{3}{B}_{16}$ = 1 278,4
${}_1A_{16}$ = 96	${}_2A_{13}$ = 77		$\overset{1}{B}_{16}$ = 1 483,6	$\overset{2}{B}_6$ = 124,2	$\overset{2}{B}_{24}$ = 3 002,4	$\overset{3}{B}_{17}$ = 1 434,8
${}_1A_{17}$ = 100			$\overset{1}{B}_{17}$ = 1 649,6	$\overset{2}{B}_7$ = 222,9	$\overset{2}{B}_{25}$ = 3 259,6	$\overset{3}{B}_{18}$ = 1 603,2
${}_1A_{18}$ = 104	${}_3A_{11}$ = 60		$\overset{1}{B}_{18}$ = 1 827,6	$\overset{2}{B}_8$ = 330	$\overset{2}{B}_{26}$ = 3 528,8	$\overset{3}{B}_{19}$ = 1 783,6
${}_1A_{19}$ = 108	${}_3A_{12}$ = 66		$\overset{1}{B}_{19}$ = 2 017,6	$\overset{2}{B}_9$ = 445,5	$\overset{2}{B}_{27}$ = 3 810	

VOIES DE LARGEUR NORMALE

convois partiels.

$\overset{k}{B}_n$					$\overset{k}{{}_iC}$	
Tm	Tm	Tm	Tm	Tm	Tm	Tm
$\overset{3}{B}_{20}$ = 1 976	$\overset{4}{B}_{22}$ = 2 278	$\overset{6}{B}_{17}$ = 843,8	$\overset{7}{B}_{22}$ = 1 271,8	$\overset{8}{B}_{22}$ = 1 184,2	${}_1\overset{1}{C}$ = 0,0	${}_{12}\overset{7}{C}$ = 163,8
$\overset{3}{B}_{21}$ = 2 180,4	$\overset{4}{B}_{23}$ = 2 501,6	$\overset{6}{B}_{18}$ = 979	$\overset{7}{B}_{23}$ = 1 448,6	$\overset{8}{B}_{23}$ = 1 356,2	${}_1\overset{2}{C}$ = 8,4	${}_{12}\overset{8}{C}$ = 124,2
$\overset{3}{B}_{22}$ = 2 396,8	$\overset{4}{B}_{24}$ = 2 737,2	$\overset{6}{B}_{19}$ = 1 126,2	$\overset{7}{B}_{24}$ = 1 637,4	$\overset{8}{B}_{24}$ = 1 540,2	${}_1\overset{3}{C}$ = 25,2	${}_{12}\overset{9}{C}$ = 93
$\overset{3}{B}_{23}$ = 2 625,2	$\overset{4}{B}_{25}$ = 2 984,8	$\overset{6}{B}_{20}$ = 1 285,4	$\overset{7}{B}_{25}$ = 1 838,2	$\overset{8}{B}_{25}$ = 1 736,2	${}_1\overset{4}{C}$ = 50,4	
$\overset{3}{B}_{24}$ = 2 865,6	$\overset{4}{B}_{26}$ = 3 244,4	$\overset{6}{B}_{21}$ = 1 456,6	$\overset{7}{B}_{26}$ = 2 051		${}_1\overset{5}{C}$ = 179,2	${}_{13}\overset{7}{C}$ = 220,6
$\overset{3}{B}_{25}$ = 3 118		$\overset{6}{B}_{22}$ = 1 639,8	$\overset{7}{B}_{27}$ = 2 275,8	$\overset{9}{B}_{1}$ = 569,4	${}_1\overset{6}{C}$ = 264,2	${}_{13}\overset{8}{C}$ = 176,2
$\overset{3}{B}_{26}$ = 3 382,4	$\overset{5}{B}_{16}$ = 875,6	$\overset{6}{B}_{23}$ = 1 835		$\overset{9}{B}_{2}$ = 445,5	${}_1\overset{7}{C}$ = 448,2	${}_{13}\overset{9}{C}$ = 140,2
$\overset{3}{B}_{27}$ = 3 658,8	$\overset{5}{B}_{17}$ = 1 008,8	$\overset{6}{B}_{24}$ = 2 042,2	$\overset{8}{B}_{1}$ = 504,6	$\overset{9}{B}_{3}$ = 330	${}_1\overset{8}{C}$ = 504,6	
$\overset{3}{B}_{28}$ = 3 947,2	$\overset{5}{B}_{18}$ = 1 154	$\overset{6}{B}_{25}$ = 2 261,4	$\overset{8}{B}_{2}$ = 389,1	$\overset{9}{B}_{5}$ = 124,2	${}_1\overset{9}{C}$ = 569,4	${}_{14}\overset{7}{C}$ = 289,4
	$\overset{5}{B}_{19}$ = 1 311,2	$\overset{6}{B}_{26}$ = 2 492,6	$\overset{8}{B}_{3}$ = 283	$\overset{9}{B}_{13}$ = 140,2		${}_{14}\overset{8}{C}$ = 240,2
$\overset{4}{B}_{13}$ = 805,6	$\overset{5}{B}_{20}$ = 1 480,4	$\overset{6}{B}_{27}$ = 2 735,8	$\overset{8}{B}_{4}$ = 183,3	$\overset{9}{B}_{20}$ = 806,6	${}_5\overset{8}{C}$ = 93	${}_{14}\overset{9}{C}$ = 199,4
$\overset{4}{B}_{14}$ = 921,2	$\overset{5}{B}_{21}$ = 1 661,6		$\overset{8}{B}_{5}$ = 93	$\overset{9}{B}_{21}$ = 949,8	${}_5\overset{9}{C}$ = 124,2	
$\overset{4}{B}_{15}$ = 1 048,8	$\overset{5}{B}_{22}$ = 1 854,8	$\overset{7}{B}_{1}$ = 448,2	$\overset{8}{B}_{11}$ = 67,2	$\overset{9}{B}_{22}$ = 1 105		${}_{15}\overset{7}{C}$ = 370,2
$\overset{4}{B}_{16}$ = 1 188,4	$\overset{5}{B}_{23}$ = 2 060	$\overset{7}{B}_{2}$ = 341,2	$\overset{8}{B}_{12}$ = 124,2	$\overset{9}{B}_{23}$ = 1 272,2	${}_6\overset{7}{C}$ = 27,6	${}_{15}\overset{8}{C}$ = 316,2
$\overset{4}{B}_{17}$ = 1 340	$\overset{5}{B}_{24}$ = 2 277,2	$\overset{7}{B}_{13}$ = 220,6	$\overset{8}{B}_{13}$ = 176,2	$\overset{9}{B}_{24}$ = 1 451,4	${}_6\overset{8}{C}$ = 43,2	${}_{15}\overset{9}{C}$ = 270,6
$\overset{4}{B}_{18}$ = 1 503,6	$\overset{5}{B}_{25}$ = 2 506,4	$\overset{7}{B}_{18}$ = 686,4	$\overset{8}{B}_{18}$ = 616,2		${}_7\overset{8}{C}$ = 8,4	
$\overset{4}{B}_{19}$ = 1 679,2	$\overset{5}{B}_{26}$ = 2 747,6	$\overset{7}{B}_{19}$ = 813,4	$\overset{8}{B}_{19}$ = 740,2			${}_{16}\overset{8}{C}$ = 404,2
$\overset{4}{B}_{20}$ = 1 866,8	$\overset{5}{B}_{27}$ = 3 000,8	$\overset{7}{B}_{20}$ = 954,2	$\overset{8}{B}_{20}$ = 876,2		${}_{11}\overset{8}{C}$ = 67,2	${}_{16}\overset{9}{C}$ = 353,8
$\overset{4}{B}_{21}$ = 2 066,4		$\overset{7}{B}_{21}$ = 1 107	$\overset{8}{B}_{21}$ = 1 024,2		${}_{11}\overset{9}{C}$ = 43,2	${}_{17}\overset{8}{C}$ = 504,2

TABLEAU III

Train-type pour voies de 1 mètre de largeur.

ÉLÉMENTS DU TRAIN-TYPE					CONSTANTES GÉNÉRALES DU TRAIN-TYPE						
							SOMMES DES MOMENTS des charges par rapport		DISTANCES du centre de gravité		
VÉHICULES	NUMÉROS des charges. n	INTENSITÉS des charges P_n	DISTANCES à la charge P_1 a_n	ESPACEMENTS des charges $a_n - a_{n-1}$	NUMÉROS des charges n	SOMMES des intensités des charges ${}_1A_n$	à la charge P_1 ${}_1^{}B_n$	à la charge P_n ${}_1^{n}C$	à la charge P_1 b_n	à la charge P_n c_n
		t.	m	m		t	tm	tm	m	m
1re machine.	1	5	0,00		1	5	0,0	0,0	0,000	0,000
	2	5	1,20	1,20	2	10	6	6	0,600	0,600
	3	5	2,40	1,20	3	15	18	18	1,200	1,200
	4	5	3,60	1,20	4	20	36	36	1,800	1,800
1er tender.	5	4	7,70	4,10	5	24	66,8	118	2,7833	4,9167
	6	4	10,70	3	6	28	109,6	190	3,9143	6,7857
2e machine.	7	5	14,80	4,10	7	33	183,6	304,8	5,5636	9,2364
	8	5	16	1,20	8	38	263,6	344,4	6,9368	9,0632
	9	5	17,20	1,20	9	43	349,6	390	8,1302	9,0698
	10	5	18,40	1,20	10	48	441,6	441,6	9,200	9,200

				3						
2e tender.	12	4	25,50		12	56	633,6	794,4	11,3143	14,1857
				3						
1er wagon.	13	4	28,50		13	60	747,6	962,4	12,460	16,040
				3						
	14	4	31,50		14	64	873,6	1 142,4	13,650	17,850
				3						
2e wagon.	15	4	34,50		15	68	1 011,6	1 334,4	14,8765	19,6235
				3						
	16	4	37,50		16	72	1 161,6	1 538,4	16,1333	21,3667
				3						
3e wagon.	17	4	40,50		17	76	1 323,6	1 754,4	17,4158	23,0842
				3						
	18	4	43,50		18	80	1 497,6	1 982,4	18,720	24,780
				3						
4e wagon.	19	4	46,50		19	84	1 683,6	2 222,4	20,0429	26,4571
				3						
	20	4	49,50		20	88	1 881,6	2 474,4	21,3818	28,1182
				3						
5e wagon.	21	4	52,50		21	92	2 091,6	2 738,4	22,7348	29,7652
				3						
	22	4	55,50		22	96	2 313,6	3 014,4	24,100	31,400
				3						
6e wagon.	23	4	58,50		23	100	2 547,6	3 302,4	25,476	33,024
				3						
	24	4	61,50		24	104	2 793,6	3 602,4	26,8615	34,6385
				3						
7e wagon.	25	4	64,50		25	108	3 051,6	3 914,4	28,2556	36,2444
				3						
	26	4	67,50		26	112	3 321,6	4 238,4	29,6571	37,8429
				3						
8e wagon.	27	4	70,50		27	116	3 603,6	4 574,4	31,0655	39,4345
				3						
	28	4	73,50		28	120	3 897,6	4 922,4	32,480	41,020
				3						
9e wagon.	29	4	76,50		29	124	4 203,6	5 282,4	33,900	42,600
				3						
	30	4	79,50		30	128	4 521,6	5 654,4	35,325	44,175
				3						
10e wagon.	31	4	82,50		31	132	4 851,6	6 038,4	36,7545	45,7455

TABLEAU IV. — TRAIN-TYPE POUF

Constantes de.

$_{i}A_{n}$			$\overset{k}{B}_{n}$				
T.	T.	T.	Tm	Tm	Tm	Tm	Tm
$_{1}A_{2}=10$	$_{1}A_{20}=88$	$_{3}A_{13}=50$	$\overset{1}{B}_{2}=6$	$\overset{1}{B}_{20}=1\,881,6$	$\overset{2}{B}_{10}=390$	$\overset{2}{B}_{28}=3\,759,6$	$\overset{3}{B}_{21}=1\,888,8$
$_{1}A_{3}=15$	$_{1}A_{21}=92$		$\overset{1}{B}_{3}=18$	$\overset{1}{B}_{21}=2\,091,6$	$\overset{2}{B}_{11}=475,2$	$\overset{2}{B}_{29}=4\,060,8$	$\overset{3}{B}_{22}=2\,101,2$
$_{1}A_{4}=20$	$_{1}A_{22}=96$	$_{4}A_{13}=45$	$\overset{1}{B}_{4}=36$	$\overset{1}{B}_{22}=2\,311,6$	$\overset{2}{B}_{12}=572,4$		$\overset{3}{B}_{23}=2\,325,6$
$_{1}A_{5}=24$	$_{1}A_{23}=100$		$\overset{1}{B}_{5}=66,8$	$\overset{1}{B}_{23}=2\,545,6$	$\overset{2}{B}_{13}=681,6$	$\overset{3}{B}_{5}=27,2$	$\overset{3}{B}_{24}=2\,562$
$_{1}A_{6}=28$	$_{1}A_{24}=104$	$_{5}A_{11}=32$	$\overset{1}{B}_{6}=109,6$	$\overset{1}{B}_{24}=2\,791,6$	$\overset{2}{B}_{14}=802,8$	$\overset{3}{B}_{6}=60,4$	$\overset{3}{B}_{25}=2\,810,4$
$_{1}A_{7}=33$	$_{1}A_{25}=108$	$_{5}A_{12}=36$	$\overset{1}{B}_{7}=183,6$	$\overset{1}{B}_{25}=3\,049,6$	$\overset{2}{B}_{15}=936$	$\overset{3}{B}_{7}=122,4$	$\overset{3}{B}_{26}=3\,070,8$
$_{1}A_{8}=38$	$_{1}A_{26}=112$	$_{5}A_{13}=40$	$\overset{1}{B}_{8}=263,6$	$\overset{1}{B}_{26}=3\,319,6$	$\overset{2}{B}_{16}=1\,081,2$	$\overset{3}{B}_{8}=190,4$	$\overset{3}{B}_{27}=3\,343,2$
$_{1}A_{9}=43$	$_{1}A_{27}=116$		$\overset{1}{B}_{9}=349,6$	$\overset{1}{B}_{27}=3\,601,6$	$\overset{2}{B}_{17}=1\,238,4$	$\overset{3}{B}_{9}=264,4$	$\overset{3}{B}_{28}=3\,627,6$
$_{1}A_{10}=48$	$_{1}A_{28}=120$	$_{6}A_{11}=28$	$\overset{1}{B}_{10}=441,6$	$\overset{1}{B}_{28}=3\,895,6$	$\overset{2}{B}_{18}=1\,407,6$	$\overset{3}{B}_{10}=344,4$	
$_{1}A_{11}=52$	$_{1}A_{29}=124$	$_{6}A_{13}=36$	$\overset{1}{B}_{11}=531,6$	$\overset{1}{B}_{29}=4\,201,6$	$\overset{2}{B}_{19}=1\,588,8$	$\overset{3}{B}_{11}=424,8$	$\overset{4}{B}_{12}=468$
$_{1}A_{12}=56$	$_{1}A_{30}=128$		$\overset{1}{B}_{12}=633,6$	$\overset{1}{B}_{30}=4\,519,6$	$\overset{2}{B}_{20}=1\,782$	$\overset{3}{B}_{12}=517,2$	$\overset{4}{B}_{13}=567,6$
$_{1}A_{13}=60$		$_{7}A_{13}=32$	$\overset{1}{B}_{13}=747,6$		$\overset{2}{B}_{21}=1\,987,2$	$\overset{3}{B}_{13}=621,6$	$\overset{4}{B}_{14}=979,2$
$_{1}A_{14}=64$	$_{2}A_{11}=47$		$\overset{1}{B}_{14}=873,6$	$\overset{2}{B}_{3}=6$	$\overset{2}{B}_{22}=2\,204,4$	$\overset{3}{B}_{14}=738$	$\overset{4}{B}_{15}=802,8$
$_{1}A_{15}=68$	$_{2}A_{12}=51$		$\overset{1}{B}_{15}=1\,011,6$	$\overset{2}{B}_{4}=18$	$\overset{2}{B}_{23}=2\,433,6$	$\overset{3}{B}_{15}=866,4$	$\overset{4}{B}_{16}=938,4$
$_{1}A_{16}=72$	$_{2}A_{13}=55$		$\overset{1}{B}_{16}=1\,161,6$	$\overset{2}{B}_{5}=44$	$\overset{2}{B}_{24}=2\,674,8$	$\overset{3}{B}_{16}=1\,006,8$	$\overset{4}{B}_{17}=1\,086$
$_{1}A_{17}=76$			$\overset{1}{B}_{17}=1\,323,6$	$\overset{2}{B}_{6}=82$	$\overset{2}{B}_{25}=2\,928$	$\overset{3}{B}_{17}=1\,159,2$	$\overset{4}{B}_{18}=1\,245,6$
$_{1}A_{18}=80$	$_{3}A_{11}=42$		$\overset{1}{B}_{18}=1\,497,6$	$\overset{2}{B}_{7}=150$	$\overset{2}{B}_{26}=3\,193,2$	$\overset{3}{B}_{18}=1\,323,6$	$\overset{4}{B}_{19}=1\,417,2$
$_{1}A_{19}=84$	$_{3}A_{12}=46$		$\overset{1}{B}_{19}=1\,683,6$	$\overset{2}{B}_{8}=224$	$\overset{2}{B}_{27}=3\,470,4$	$\overset{3}{B}_{19}=1\,500$	$\overset{4}{B}_{20}=1\,600,8$
				$\overset{2}{B}_{9}=304$		$\overset{3}{B}_{20}=1\,688,4$	$\overset{4}{B}_{21}=1\,796,4$

VOIES DE 1 MÈTRE DE LARGEUR

convois partiels.

					${}_{i}\overset{k}{C}$	
Tm	Tm	Tm	Tm	Tm	Tm	Tm
$\overset{4}{B}_{22} = 2\,004$	$\overset{5}{B}_{27} = 2\,828,4$	$\overset{7}{B}_{17} = 503,6$	$\overset{8}{B}_{13} = 132$	$\overset{9}{B}_{19} = 628,8$	${}_{1}\overset{1}{C} = 0$	${}_{11}\overset{7}{C} = 66,8$
$\overset{4}{B}_{23} = 2\,223,6$	$\overset{5}{B}_{28} = 3\,091,6$	$\overset{7}{B}_{18} = 618,4$	$\overset{8}{B}_{17} = 452$	$\overset{9}{B}_{20} = 758$	${}_{1}\overset{2}{C} = 6$	${}_{11}\overset{8}{C} = 44$
$\overset{4}{B}_{24} = 2\,455,2$		$\overset{7}{B}_{19} = 745,2$	$\overset{8}{B}_{18} = 562$	$\overset{9}{B}_{21} = 899,2$	${}_{1}\overset{3}{C} = 18$	${}_{11}\overset{9}{C} = 27,2$
$\overset{4}{B}_{25} = 2\,698,8$	$\overset{6}{B}_{17} = 700,4$	$\overset{7}{B}_{20} = 884$	$\overset{8}{B}_{19} = 684$	$\overset{9}{B}_{22} = 1\,052,4$	${}_{1}\overset{4}{C} = 36$	
$\overset{4}{B}_{26} = 2\,954,4$	$\overset{6}{B}_{18} = 831,6$	$\overset{7}{B}_{21} = 1\,034,8$	$\overset{8}{B}_{20} = 818$	$\overset{9}{B}_{23} = 1\,217,6$	${}_{1}\overset{5}{C} = 118$	${}_{12}\overset{7}{C} = 109,6$
$\overset{4}{B}_{27} = 3\,222$	$\overset{6}{B}_{19} = 974,8$	$\overset{7}{B}_{22} = 1\,197,6$	$\overset{8}{B}_{21} = 964$	$\overset{9}{B}_{24} = 1\,394,8$	${}_{1}\overset{6}{C} = 190$	${}_{12}\overset{8}{C} = 82$
$\overset{4}{B}_{28} = 3\,501,6$	$\overset{6}{B}_{20} = 1\,130$	$\overset{7}{B}_{23} = 1\,372,4$	$\overset{8}{B}_{22} = 1\,122$	$\overset{9}{B}_{25} = 1\,584$	${}_{1}\overset{7}{C} = 304,8$	${}_{12}\overset{9}{C} = 60,4$
	$\overset{6}{B}_{21} = 1\,297,2$	$\overset{7}{B}_{24} = 1\,559,2$	$\overset{8}{B}_{23} = 1\,292$	$\overset{9}{B}_{26} = 1\,785,2$	${}_{1}\overset{8}{C} = 344,4$	
$\overset{5}{B}_{16} = 725,2$	$\overset{6}{B}_{22} = 1\,476,4$	$\overset{7}{B}_{25} = 1\,758$	$\overset{8}{B}_{24} = 1\,474$		${}_{1}\overset{9}{C} = 390$	${}_{13}\overset{7}{C} = 164,4$
$\overset{5}{B}_{17} = 856,4$	$\overset{6}{B}_{23} = 1\,667,6$	$\overset{7}{B}_{26} = 1\,968,8$	$\overset{8}{B}_{25} = 1\,668$	$\overset{10}{B}_{1} = 441,6$	${}_{1}\overset{10}{C} = 441,6$	${}_{13}\overset{8}{C} = 132$
$\overset{5}{B}_{18} = 999,6$	$\overset{6}{B}_{24} = 1\,870,8$	$\overset{7}{B}_{27} = 2\,191,6$	$\overset{8}{B}_{26} = 1\,874$	$\overset{10}{B}_{20} = 704$	${}_{1}\overset{11}{C} = 638,4$	${}_{13}\overset{9}{C} = 105,6$
$\overset{5}{B}_{19} = 1\,154,8$	$\overset{6}{B}_{25} = 2\,086$	$\overset{7}{B}_{28} = 2\,426,4$	$\overset{8}{B}_{27} = 2\,092$	$\overset{10}{B}_{21} = 840,4$		
$\overset{5}{B}_{20} = 1\,322$	$\overset{6}{B}_{26} = 2\,313,2$			$\overset{10}{B}_{22} = 988,8$	${}_{4}\overset{8}{C} = 122,4$	${}_{14}\overset{7}{C} = 231,2$
$\overset{5}{B}_{21} = 1\,501,2$	$\overset{6}{B}_{27} = 2\,552,4$	$\overset{8}{B}_{1} = 344,4$	$\overset{9}{B}_{1} = 390$	$\overset{10}{B}_{23} = 1\,149,2$		${}_{14}\overset{8}{C} = 194$
$\overset{5}{B}_{22} = 1\,692,4$	$\overset{6}{B}_{28} = 2\,803,6$	$\overset{8}{B}_{2} = 264,4$	$\overset{9}{B}_{2} = 304$	$\overset{10}{B}_{24} = 1\,321,6$	${}_{5}\overset{8}{C} = 60,4$	${}_{14}\overset{9}{C} = 162,8$
$\overset{5}{B}_{23} = 1\,895,6$		$\overset{8}{B}_{3} = 190,4$	$\overset{9}{B}_{3} = 224$		${}_{5}\overset{9}{C} = 82$	${}_{14}\overset{10}{C} = 137,6$
$\overset{5}{B}_{24} = 2\,110,8$	$\overset{7}{B}_{1} = 304,8$	$\overset{8}{B}_{5} = 60,4$	$\overset{9}{B}_{5} = 82$	$\overset{11}{B}_{23} = 936$		
$\overset{5}{B}_{25} = 2\,338$	$\overset{7}{B}_{2} = 230,8$	$\overset{8}{B}_{11} = 44$	$\overset{9}{B}_{13} = 105,6$	$\overset{11}{B}_{24} = 1\,092$	${}_{6}\overset{8}{C} = 27,2$	${}_{15}\overset{8}{C} = 268$
$\overset{5}{B}_{26} = 2\,577,2$	$\overset{7}{B}_{13} = 164,4$	$\overset{8}{B}_{12} = 82$	$\overset{9}{B}_{18} = 511,6$			${}_{15}\overset{9}{C} = 232$
					${}_{7}\overset{8}{C} = 6$	${}_{16}\overset{9}{C} = 313,2$

TABLEAU V

Convoi formé d'une file de tombereaux de 6 tonnes.

VÉHICULES	ÉLÉMENTS DU CONVOI				CONSTANTES DU CONVOI		
	NUMÉROS des charges n	INTENSITÉS des charges P_n	DISTANCES à la charge P_0 a_n	ESPACEMENTS des charges $a_n - a_{n-1}$	NUMÉROS des charges n	SOMMES des intensités des charges A_n	SOMMES des moments des charges par rapport à la charge P_0 B_n
		t.	m.	m.		t.	tm.
1/2 tombereau	0	3	0,00		0	3	0
Cheval	1	0,7	2,75	2,75	1	3,7	1,925
Cheval	2	0,7	5,25	2,50	2	4,4	5,6
Tombereau	3	6	8	2,75	3	10,4	53,6
Cheval	4	0,7	10,75	2,75	4	11,1	61,125
Cheval	5	0,7	13,25	2,50	5	11,8	70,4
Tombereau	6	6	16	2.75	6	17,8	166,4
Cheval	7	0,7	18,75	2,75	7	18,5	179,525
Cheval	8	0,7	21,25	2,50	8	19,2	194,4
Tombereau	9	6	24	2,75	9	25,2	338,4
Cheval	10	0,7	26,75	2,75	10	25,9	357,125

Cheval	11	0,7	29,25	2,50	11	26,6	377,6
Tombereau	12	6	32	2,75	12	32,6	569,6
Cheval	13	0,7	34,75	2,75	13	33,3	593,925
Cheval	14	0,7	37,25	2,50	14	34	620
Tombereau	15	6	40	2,75	15	40	860
Cheval	16	0,7	42,75	2,75	16	40,7	889,925
Cheval	17	0,7	45,25	2,50	17	41,4	921,6
Tombereau	18	6	48	2,75	18	47,4	1 209,6
Cheval	19	0,7	50,75	2,75	19	48,1	1 245,125
Cheval	20	0,7	53,25	2,50	20	48,8	1 282,4
Tombereau	21	6	56	2,75	21	54,8	1 618,4
Cheval	22	0,7	58,75	2,75	22	55,5	1 659,525
Cheval	23	0,7	61,25	2,50	23	56,2	1 702,4
Tombereau	24	6	64	2,75	24	62,2	2 086,4
Cheval	25	0,7	66,75	2,75	25	62,9	2 133,125
Cheval	26	0,7	69,25	2,50	26	63,6	2 181,6
Tombereau	27	6	72	2,75	27	69,6	2 613,6
Cheval	28	0,7	74,75	2,75	28	70,3	2 665,925
Cheval	29	0,7	77,25	2,50	29	71	2 720
Tombereau	30	6	80	2,75	30	77	3 200

TABLEAU VI

Convoi formé d'une file de chariots de 16 tonnes.

	ÉLÉMENTS DU CONVOI				CONSTANTES DU CONVOI		
VÉHICULES	NUMÉROS des charges n	INTENSITÉS des charges P_n	DISTANCES à la charge P_0 a_n	ESPACEMENTS des charges $a_n - a_{n-1}$	NUMÉROS des charges n	SOMMES des intensités des charges A_n	SOMMES des moments des charges par rapport à la charge P_0 B_n
		t.	m.	m.		t.	tm.
Chariot.	0	8	0,00		0	8	0
	1	8	3	3	1	16	24
8 chevaux	2	1,4	5,75	2,75	2	17,4	32,05
	3	1,4	8,25	2,50	3	18,8	43,6
	4	1,4	10,75	2,50	4	20,2	58,65
	5	1,4	13,25	2,50	5	21,6	77,2
Chariot.	6	8	16	2,75	6	29,6	205,2
	7	8	19	3	7	37,6	357,2
8 chevaux.	8	1,4	21,75	2,75	8	39	387,65
	9	1,4	24,25	2,50	9	40,4	421,6
	10	[illegible]	[illegible]	2,50	[illegible]	[illegible]	[illegible]

				[illegible]			
Chariot	11	1,4	29,25	2,75	11	43,2	500
	12	8	32	3	12	51,2	756
	13	8	35	2,75	13	59,2	1 036
8 chevaux	14	1,4	37,75	2,50	14	60,6	1 088,85
	15	1,4	40,25	2,50	15	62	1 145,2
	16	1,4	42,75	2,50	16	63,4	1 205,05
	17	1,4	45,25	2,75	17	64,8	1 268,4
Chariot	18	8	48	3	18	72,8	1 652,4
	19	8	51	2,75	19	80,8	2 060,4
8 chevaux	20	1,4	53,75	2,50	20	82,2	2 135,65
	21	1,4	56,25	2,50	21	83,6	2 214,4
	22	1,4	58,75	2,50	22	85	2 296,65
	23	1,4	61,25	2,75	23	86,4	2 382,4
Chariot	24	8	64	3	24	94,4	2 894,4
	25	8	67	2,75	25	102,4	3 430,4
8 chevaux	26	1,4	69,75	2,50	26	103,8	3 528,05
	27	1,4	72,25	2,50	27	105,2	3 629,2
	28	1,4	74,75	2,50	28	106,6	3 733,85
	29	1,4	77,25	2,75	29	108	3 842
Chariot	30	8	80		30	116	4 482

TABLEAU VI

Convoi formé d'une file de chariots de 16 tonnes.

ÉLÉMENTS DU CONVOI						CONSTANTES DU CONVOI		
VÉHICULES	NUMÉROS des charges n	INTENSITÉS des charges P_n	DISTANCES à la charge P_0 a_n	ESPACEMENTS des charges $a_n - a_{n-1}$		NUMÉROS des charges n	SOMMES des intensités des charges A_n	SOMMES des moments des charges par rapport à la charge P_0 B_n
		t.	m.	m.			t.	tm.
Chariot.	0	8	0,00			0	8	0
	1	8	3	3		1	16	24
8 chevaux	2	1,4	5,75	2,75		2	17,4	32,05
	3	1,4	8,25	2,50		3	18,8	43,6
	4	1,4	10,75	2,50		4	20,2	58,65
	5	1,4	13,25	2,50		5	21,6	77,2
Chariot.	6	8	16	2,75		6	29,6	205,2
	7	8	19	3		7	37,6	357,2
8 chevaux.	8	1,4	21,75	2,75		8	39	387,65
	9	1,4	24,25	2,50		9	40,4	421,6
	10	1,4	26,75	2,50				

Chariot.	11	1,4	29,25	2,75	11	43,2	500
	12	8	32	3	12	51,2	756
	13	8	35	2,75	13	59,2	1 036
8 chevaux. . . .	14	1,4	37,75	2,50	14	60,6	1 088,85
	15	1,4	40,25	2,50	15	62	1 145,2
	16	1,4	42,75	2,50	16	63,4	1 205,05
	17	1,4	45,25	2,75	17	64,8	1 268,4
Chariot.	18	8	48	3	18	72,8	1 652,4
	19	8	51	2,75	19	80,8	2 060,4
8 chevaux. . . .	20	1,4	53,75	2,50	20	82,2	2 135,65
	21	1,4	56,25	2,50	21	83,6	2 214,4
	22	1,4	58,75	2,50	22	85	2 296,65
	23	1,4	61,25	2,75	23	86,4	2 382,4
Chariot.	24	8	64	3	24	94,4	2 894,4
	25	8	67	2,75	25	102,4	3 430,4
8 chevaux. . . .	26	1,4	69,75	2,50	26	103,8	3 528,05
	27	1,4	72,25	2,50	27	105,2	3 629,2
	28	1,4	74,75	2,50	28	106,6	3 733,85
	29	1,4	77,25	2,75	29	108	3 842
Chariot.	30	8	80		30	116	4 482

TABLEAU II. — TRAIN-TYPE POUR

Constantes des

${}_iA_n$						
T.	T.	T.	Tm	Tm	Tm	Tm
${}_1A_2$ = 14	${}_1A_{20}$ = 112	${}_3A_{13}$ = 70	$\overset{1}{B}_2$ = 8,4	$\overset{1}{B}_{20}$ = 2 219,6	$\overset{2}{B}_{10}$ = 569,4	$\overset{2}{B}_{28}$ = 4 103,2
${}_1A_3$ = 21	${}_1A_{21}$ = 116		$\overset{1}{B}_3$ = 25,2	$\overset{1}{B}_{21}$ = 2 433,6	$\overset{2}{B}_{11}$ = 703,2	$\overset{2}{B}_{29}$ = 4 408,4
${}_1A_4$ = 28	${}_1A_{22}$ = 120	${}_4A_{13}$ = 63	$\overset{1}{B}_4$ = 50,4	$\overset{1}{B}_{22}$ = 2 659,6	$\overset{2}{B}_{12}$ = 852	
${}_1A_5$ = 34	${}_1A_{23}$ = 124		$\overset{1}{B}_5$ = 99,6	$\overset{1}{B}_{23}$ = 2 897,6	$\overset{2}{B}_{13}$ = 965,2	$\overset{3}{B}_5$ = 43,2
${}_1A_6$ = 40	${}_1A_{24}$ = 128	${}_5A_{11}$ = 46	$\overset{1}{B}_6$ = 163,8	$\overset{1}{B}_{24}$ = 3 147,6	$\overset{2}{B}_{14}$ = 1 090,4	$\overset{3}{B}_6$ = 93
${}_1A_7$ = 47	${}_1A_{25}$ = 132	${}_5A_{12}$ = 52	$\overset{1}{B}_7$ = 270,9	$\overset{1}{B}_{25}$ = 3 409,9	$\overset{2}{B}_{15}$ = 1 227,6	$\overset{3}{B}_7$ = 183,3
${}_1A_8$ = 54	${}_1A_{26}$ = 136	${}_5A_{13}$ = 56	$\overset{1}{B}_8$ = 386,4	$\overset{1}{B}_{26}$ = 3 683,6	$\overset{2}{B}_{16}$ = 1 376,8	$\overset{3}{B}_8$ = 282
${}_1A_9$ = 61	${}_1A_{27}$ = 140		$\overset{1}{B}_9$ = 510,3	$\overset{1}{B}_{27}$ = 3 969,6	$\overset{2}{B}_{17}$ = 1 538	$\overset{3}{B}_9$ = 389,1
${}_1A_{10}$ = 68	${}_1A_{28}$ = 144	${}_6A_{11}$ = 40	$\overset{1}{B}_{10}$ = 642,6	$\overset{1}{B}_{28}$ = 4 267,6	$\overset{2}{B}_{18}$ = 1 711,2	$\overset{3}{B}_{10}$ = 504,6
${}_1A_{11}$ = 74	${}_1A_{29}$ = 148	${}_6A_{12}$ = 46	$\overset{1}{B}_{11}$ = 783,6	$\overset{1}{B}_{29}$ = 4 577,6	$\overset{2}{B}_{19}$ = 1 896,4	$\overset{3}{B}_{11}$ = 631,2
${}_1A_{12}$ = 80	${}_1A_{30}$ = 152	${}_6A_{13}$ = 50	$\overset{1}{B}_{12}$ = 939,6	$\overset{1}{B}_{30}$ = 4 899,6	$\overset{2}{B}_{20}$ = 2 093,6	$\overset{3}{B}_{12}$ = 772,8
${}_1A_{13}$ = 84			$\overset{1}{B}_{13}$ = 1 057,6		$\overset{2}{B}_{21}$ = 2 302,8	$\overset{3}{B}_{13}$ = 881,2
${}_1A_{14}$ = 88	${}_2A_{11}$ = 67	${}_7A_{13}$ = 44	$\overset{1}{B}_{14}$ = 1 187,6	$\overset{2}{B}_3$ = 8,4	$\overset{2}{B}_{22}$ = 2 524	$\overset{3}{B}_{14}$ = 1 001,6
${}_1A_{15}$ = 92	${}_2A_{12}$ = 73		$\overset{1}{B}_{15}$ = 1 329,6	$\overset{2}{B}_4$ = 25,2	$\overset{2}{B}_{23}$ = 2 757,2	$\overset{3}{B}_{15}$ = 1 134
${}_1A_{16}$ = 96	${}_2A_{13}$ = 77		$\overset{1}{B}_{16}$ = 1 483,6	$\overset{2}{B}_5$ = 67,2	$\overset{2}{B}_{24}$ = 3 002,4	$\overset{3}{B}_{16}$ = 1 278,4
${}_1A_{17}$ = 100			$\overset{1}{B}_{17}$ = 1 649,6	$\overset{2}{B}_6$ = 124,2	$\overset{2}{B}_{25}$ = 3 259,6	$\overset{3}{B}_{17}$ = 1 434,8
${}_1A_{18}$ = 104	${}_3A_{11}$ = 60		$\overset{1}{B}_{18}$ = 1 827,6	$\overset{2}{B}_7$ = 222,9	$\overset{2}{B}_{26}$ = 3 528,8	$\overset{3}{B}_{18}$ = 1 603,2
${}_1A_{19}$ = 108	${}_3A_{12}$ = 66		$\overset{1}{B}_{19}$ = 2 017,6	$\overset{2}{B}_8$ = 330	$\overset{2}{B}_{27}$ = 3 810	$\overset{3}{B}_{19}$ = 1 783,6
				$\overset{2}{B}_9$ = 445,5		

VOIES DE LARGEUR NORMALE

convois partiels.

$\overset{k}{B}_n$					${}_i\overset{k}{C}$	
Tm	Tm	Tm	Tm	Tm	Tm	Tm
$\overset{3}{B}_{20}$ = 1 976	$\overset{4}{B}_{22}$ = 2 278	$\overset{6}{B}_{17}$ = 843,8	$\overset{7}{B}_{22}$ = 1 271,8	$\overset{8}{B}_{22}$ = 1 184,2	${}_1\overset{1}{C}$ = 0,0	${}_{12}\overset{7}{C}$ = 163,8
$\overset{3}{B}_{21}$ = 2 180,4	$\overset{4}{B}_{23}$ = 2 501,6	$\overset{6}{B}_{18}$ = 979	$\overset{7}{B}_{23}$ = 1 448,6	$\overset{8}{B}_{23}$ = 1 356,2	${}_1\overset{2}{C}$ = 8,4	${}_{12}\overset{8}{C}$ = 124,2
$\overset{3}{B}_{22}$ = 2 396,8	$\overset{4}{B}_{24}$ = 2 737,2	$\overset{6}{B}_{19}$ = 1 126,2	$\overset{7}{B}_{24}$ = 1 637,4	$\overset{8}{B}_{24}$ = 1 540,2	${}_1\overset{3}{C}$ = 25,2	${}_{12}\overset{9}{C}$ = 93
$\overset{3}{B}_{23}$ = 2 625,2	$\overset{4}{B}_{25}$ = 2 984,8	$\overset{6}{B}_{20}$ = 1 285,4	$\overset{7}{B}_{25}$ = 1 838,2	$\overset{8}{B}_{25}$ = 1 736,2	${}_1\overset{4}{C}$ = 50,4	
$\overset{3}{B}_{24}$ = 2 865,6	$\overset{4}{B}_{26}$ = 3 244,4	$\overset{6}{B}_{21}$ = 1 456,6	$\overset{7}{B}_{26}$ = 2 051		${}_1\overset{5}{C}$ = 179,2	${}_{13}\overset{7}{C}$ = 220,6
$\overset{3}{B}_{25}$ = 3 118		$\overset{6}{B}_{22}$ = 1 639,8	$\overset{7}{B}_{27}$ = 2 275,8	$\overset{9}{B}_{1}$ = 569,4	${}_1\overset{6}{C}$ = 264,2	${}_{13}\overset{8}{C}$ = 176,2
$\overset{3}{B}_{26}$ = 3 382,4	$\overset{5}{B}_{16}$ = 875,6	$\overset{6}{B}_{23}$ = 1 835		$\overset{9}{B}_{2}$ = 445,5	${}_1\overset{7}{C}$ = 448,2	${}_{13}\overset{9}{C}$ = 140,2
$\overset{3}{B}_{27}$ = 3 658,8	$\overset{5}{B}_{17}$ = 1 008,8	$\overset{6}{B}_{24}$ = 2 042,2	$\overset{8}{B}_{1}$ = 504,6	$\overset{9}{B}_{3}$ = 330	${}_1\overset{8}{C}$ = 504,6	${}_{14}\overset{7}{C}$ = 289,4
$\overset{3}{B}_{28}$ = 3 947,2	$\overset{5}{B}_{18}$ = 1 154	$\overset{6}{B}_{25}$ = 2 261,4	$\overset{8}{B}_{2}$ = 389,1	$\overset{9}{B}_{5}$ = 124,2	${}_1\overset{9}{C}$ = 569,4	${}_{14}\overset{8}{C}$ = 240,2
	$\overset{5}{B}_{19}$ = 1 311,2	$\overset{6}{B}_{26}$ = 2 492,6	$\overset{8}{B}_{3}$ = 283	$\overset{9}{B}_{13}$ = 140,2		${}_{14}\overset{9}{C}$ = 199,4
$\overset{4}{B}_{13}$ = 805,6	$\overset{5}{B}_{20}$ = 1 480,4	$\overset{6}{B}_{27}$ = 2 735,8	$\overset{8}{B}_{4}$ = 183,3	$\overset{9}{B}_{20}$ = 806,6	${}_5\overset{8}{C}$ = 93	
$\overset{4}{B}_{14}$ = 921,2	$\overset{5}{B}_{21}$ = 1 661,6		$\overset{8}{B}_{5}$ = 93	$\overset{9}{B}_{21}$ = 949,8	${}_5\overset{9}{C}$ = 124,2	${}_{15}\overset{7}{C}$ = 370,2
$\overset{4}{B}_{15}$ = 1 048,8	$\overset{5}{B}_{22}$ = 1 854,8	$\overset{7}{B}_{1}$ = 448,2	$\overset{8}{B}_{11}$ = 67,2	$\overset{9}{B}_{22}$ = 1 105		${}_{15}\overset{8}{C}$ = 316,2
$\overset{4}{B}_{16}$ = 1 188,4	$\overset{5}{B}_{23}$ = 2 060	$\overset{7}{B}_{2}$ = 341,2	$\overset{8}{B}_{12}$ = 124,2	$\overset{9}{B}_{23}$ = 1 272,2	${}_6\overset{7}{C}$ = 27,6	${}_{15}\overset{9}{C}$ = 270,6
$\overset{4}{B}_{17}$ = 1 340	$\overset{5}{B}_{24}$ = 2 277,2	$\overset{7}{B}_{13}$ = 220,6	$\overset{8}{B}_{13}$ = 176,2	$\overset{9}{B}_{24}$ = 1 451,4	${}_6\overset{8}{C}$ = 43,2	
$\overset{4}{B}_{18}$ = 1 503,6	$\overset{5}{B}_{25}$ = 2 506,4	$\overset{7}{B}_{18}$ = 686,4	$\overset{8}{B}_{18}$ = 616,2		${}_7\overset{8}{C}$ = 8,4	${}_{16}\overset{8}{C}$ = 404,2
$\overset{4}{B}_{19}$ = 1 679,2	$\overset{5}{B}_{26}$ = 2 747,6	$\overset{7}{B}_{19}$ = 813,4	$\overset{8}{B}_{19}$ = 740,2			${}_{10}\overset{9}{C}$ = 353,8
$\overset{4}{B}_{20}$ = 1 866,8	$\overset{5}{B}_{27}$ = 3 000,8	$\overset{7}{B}_{20}$ = 954,2	$\overset{8}{B}_{20}$ = 876,2		${}_{11}\overset{8}{C}$ = 67,2	${}_{17}\overset{8}{C}$ = 504,2
$\overset{4}{B}_{21}$ = 2 066,4		$\overset{7}{B}_{21}$ = 1 107	$\overset{8}{B}_{21}$ = 1 024,2		${}_{11}\overset{9}{C}$ = 43,2	

TABLEAU III

Train-type pour voies de 1 mètre de largeur.

ÉLÉMENTS DU TRAIN-TYPE					CONSTANTES GÉNÉRALES DU TRAIN-TYPE					
VÉHICULES	NUMÉROS des charges. n	INTENSITÉS des charges P_n	DISTANCES à la charge P_1 a_n	ESPACEMENTS des charges $a_n - a_{n-1}$	NUMÉROS des charges n	SOMMES des intensités des charges ${}_1A_n$	SOMMES DES MOMENTS des charges par rapport à la charge P_1 ${}^{1}B_n$	SOMMES DES MOMENTS des charges par rapport à la charge P_n ${}^{n}{}_1C$	DISTANCES du centre de gravité à la charge P_1 b_n	DISTANCES du centre de gravité à la charge P_n c_n
		t.	m	m		t	tm	tm	m	m
1re machine.	1	5	0,00		1	5	0,0	0,0	0,000	0,000
	2	5	1,20	1,20	2	10	6	6	0,600	0,600
	3	5	2,40	1,20	3	15	18	18	1,200	1,200
	4	5	3,60	1,20	4	20	36	36	1,800	1,800
1er tender.	5	4	7,70	4,10	5	24	66,8	118	2,7833	4,9167
	6	4	10,70	3	6	28	109,6	190	3,9143	6,7857
2e machine.	7	5	14,80	4,10	7	33	183,6	304,8	5,5636	9,2364
	8	5	16	1,20	8	38	263,6	344,4	6,9368	9,0632
	9	5	17,20	1,20	9	43	349,6	390	8,1302	9,0698
	10	5	18,40	1,20	10	48	441,6	441,6	9,200	9,200

2e tender.	12	4	25,50	3	12	56	633,6	794,4	11,3143	14,1857
1er wagon.	13	4	28,50	3	13	60	747,6	962,4	12,460	16,040
	14	4	31,50	3	14	64	873,6	1 142,4	13,650	17,850
2e wagon.	15	4	34,50	3	15	68	1 011,6	1 334,4	14,8765	19,6235
	16	4	37,50	3	16	72	1 161,6	1 538,4	16,1333	21,3667
3e wagon.	17	4	40,50	3	17	76	1 323,6	1 754,4	17,4158	23,0842
	18	4	43,50	3	18	80	1 497,6	1 982,4	18,720	24,780
4e wagon.	19	4	46,50	3	19	84	1 683,6	2 222,4	20,0429	26,4571
	20	4	49,50	3	20	88	1 881,6	2 474,4	21,3818	28,1182
5e wagon.	21	4	52,50	3	21	92	2 091,6	2 738,4	22,7348	29,7652
	22	4	55,50	3	22	96	2 313,6	3 014,4	24,100	31,400
6e wagon.	23	4	58,50	3	23	100	2 547,6	3 302,4	25,476	33,024
	24	4	61,50	3	24	104	2 793,6	3 602,4	26,8615	34,6385
7e wagon.	25	4	64,50	3	25	108	3 051,6	3 914,4	28,2556	36,2444
	26	4	67,50	3	26	112	3 321,6	4 238,4	29,6571	37,8429
8e wagon.	27	4	70,50	3	27	116	3 603,6	4 574,4	31,0655	39,4345
	28	4	73,50	3	28	120	3 897,6	4 922,4	32,480	41,020
9e wagon.	29	4	76,50	3	29	124	4 203,6	5 282,4	33,900	42,600
	30	4	79,50	3	30	128	4 521,6	5 654,4	35,325	44,175
10e wagon.	31	4	82,50	3	31	132	4 851,6	6 038,4	36,7545	45,7455

TABLEAU IV. — TRAIN-TYPE POUR

Constantes de

$_{i}A_{n}$			$\overset{k}{B}_{n}$				
T.	T.	T.	Tm	Tm	Tm	Tm	Tm
$_{1}A_{2} = 10$	$_{1}A_{20} = 88$	$_{3}A_{13} = 50$	$\overset{1}{B}_{2} = 6$	$\overset{1}{B}_{20} = 1\,881,6$	$\overset{2}{B}_{10} = 390$	$\overset{2}{B}_{28} = 3\,759,6$	$\overset{3}{B}_{21} = 1\,888,8$
$_{1}A_{3} = 15$	$_{1}A_{21} = 92$		$\overset{1}{B}_{3} = 18$	$\overset{1}{B}_{21} = 2\,091,6$	$\overset{2}{B}_{11} = 475,2$	$\overset{2}{B}_{29} = 4\,060,8$	$\overset{3}{B}_{22} = 2\,101,2$
$_{1}A_{4} = 20$	$_{1}A_{22} = 96$	$_{4}A_{13} = 45$	$\overset{1}{B}_{4} = 36$	$\overset{1}{B}_{22} = 2\,311,6$	$\overset{2}{B}_{12} = 572,4$	$\overset{3}{B}_{5} = 27,2$	$\overset{3}{B}_{23} = 2\,325,6$
$_{1}A_{5} = 24$	$_{1}A_{23} = 100$		$\overset{1}{B}_{5} = 66,8$	$\overset{1}{B}_{23} = 2\,545,6$	$\overset{2}{B}_{13} = 681,6$	$\overset{3}{B}_{6} = 60,4$	$\overset{3}{B}_{24} = 2\,562$
$_{1}A_{6} = 28$	$_{1}A_{24} = 104$	$_{5}A_{11} = 32$	$\overset{1}{B}_{6} = 109,6$	$\overset{1}{B}_{24} = 2\,791,6$	$\overset{2}{B}_{14} = 802,8$	$\overset{3}{B}_{7} = 122,4$	$\overset{3}{B}_{25} = 2\,810,4$
$_{1}A_{7} = 33$	$_{1}A_{25} = 108$	$_{5}A_{12} = 36$	$\overset{1}{B}_{7} = 183,6$	$\overset{1}{B}_{25} = 3\,049,6$	$\overset{2}{B}_{15} = 936$	$\overset{3}{B}_{8} = 190,4$	$\overset{3}{B}_{26} = 3\,070,8$
$_{1}A_{8} = 38$	$_{1}A_{26} = 112$	$_{5}A_{13} = 40$	$\overset{1}{B}_{8} = 263,6$	$\overset{1}{B}_{26} = 3\,319,6$	$\overset{2}{B}_{16} = 1\,081,2$	$\overset{3}{B}_{9} = 264,4$	$\overset{3}{B}_{27} = 3\,343,2$
$_{1}A_{9} = 43$	$_{1}A_{27} = 116$		$\overset{1}{B}_{9} = 349,6$	$\overset{1}{B}_{27} = 3\,601,6$	$\overset{2}{B}_{17} = 1\,238,4$	$\overset{3}{B}_{10} = 344,4$	$\overset{3}{B}_{28} = 3\,627,6$
$_{1}A_{10} = 48$	$_{1}A_{28} = 120$	$_{6}A_{11} = 28$	$\overset{1}{B}_{10} = 441,6$	$\overset{1}{B}_{28} = 3\,895,6$	$\overset{2}{B}_{18} = 1\,407,6$	$\overset{3}{B}_{11} = 424,8$	$\overset{4}{B}_{12} = 468$
$_{1}A_{11} = 52$	$_{1}A_{29} = 124$	$_{6}A_{13} = 36$	$\overset{1}{B}_{11} = 531,6$	$\overset{1}{B}_{29} = 4\,201,6$	$\overset{2}{B}_{19} = 1\,588,8$	$\overset{3}{B}_{12} = 517,2$	$\overset{4}{B}_{13} = 567,6$
$_{1}A_{12} = 56$	$_{1}A_{30} = 128$		$\overset{1}{B}_{12} = 633,6$	$\overset{1}{B}_{30} = 4\,519,6$	$\overset{2}{B}_{20} = 1\,782$	$\overset{3}{B}_{13} = 621,6$	$\overset{4}{B}_{14} = 979,2$
$_{1}A_{13} = 60$		$_{7}A_{13} = 32$	$\overset{1}{B}_{13} = 747,6$	$\overset{2}{B}_{3} = 6$	$\overset{2}{B}_{21} = 1\,987,2$	$\overset{3}{B}_{14} = 738$	$\overset{4}{B}_{15} = 802,8$
$_{1}A_{14} = 64$	$_{2}A_{11} = 47$		$\overset{1}{B}_{14} = 873,6$	$\overset{2}{B}_{4} = 18$	$\overset{2}{B}_{22} = 2\,204,4$	$\overset{3}{B}_{15} = 866,4$	$\overset{4}{B}_{16} = 938,4$
$_{1}A_{15} = 68$	$_{2}A_{12} = 51$		$\overset{1}{B}_{15} = 1\,011,6$	$\overset{2}{B}_{5} = 44$	$\overset{2}{B}_{23} = 2\,433,6$	$\overset{3}{B}_{16} = 1\,006,8$	$\overset{4}{B}_{17} = 1\,086$
$_{1}A_{16} = 72$	$_{2}A_{13} = 55$		$\overset{1}{B}_{16} = 1\,161,6$	$\overset{2}{B}_{6} = 82$	$\overset{2}{B}_{24} = 2\,674,8$	$\overset{3}{B}_{17} = 1\,159,2$	$\overset{4}{B}_{18} = 1\,245,6$
$_{1}A_{17} = 76$			$\overset{1}{B}_{17} = 1\,323,6$	$\overset{2}{B}_{7} = 150$	$\overset{2}{B}_{25} = 2\,928$	$\overset{3}{B}_{18} = 1\,323,6$	$\overset{4}{B}_{19} = 1\,417,2$
$_{1}A_{18} = 80$	$_{3}A_{11} = 42$		$\overset{1}{B}_{18} = 1\,497,6$	$\overset{2}{B}_{8} = 224$	$\overset{2}{B}_{26} = 3\,193,2$	$\overset{3}{B}_{19} = 1\,500$	$\overset{4}{B}_{20} = 1\,600,8$
$_{1}A_{19} = 84$	$_{3}A_{12} = 46$		$\overset{1}{B}_{19} = 1\,683,6$	$\overset{2}{B}_{9} = 304$	$\overset{2}{B}_{27} = 3\,470,4$	$\overset{3}{B}_{20} = 1\,688,4$	$\overset{4}{B}_{21} = 1\,796,4$

VOIES DE 1 MÈTRE DE LARGEUR

convois partiels.

					$\overset{k}{{}_{i}C}$	
Tm	Tm	Tm	Tm	Tm	Tm	Tm
$\overset{4}{B}_{22}$ = 2 004	$\overset{5}{B}_{27}$ = 2 828,4	$\overset{7}{B}_{17}$ = 503,6	$\overset{8}{B}_{13}$ = 132	$\overset{9}{B}_{19}$ = 628,8	${}_{1}\overset{1}{C}$ = 0	${}_{11}\overset{7}{C}$ = 66,8
$\overset{4}{B}_{23}$ = 2 223,6	$\overset{5}{B}_{28}$ = 3 091,6	$\overset{7}{B}_{18}$ = 618,4	$\overset{8}{B}_{17}$ = 452	$\overset{9}{B}_{20}$ = 758	${}_{1}\overset{2}{C}$ = 6	${}_{11}\overset{8}{C}$ = 44
$\overset{4}{B}_{24}$ = 2 455,2	$\overset{6}{B}_{17}$ = 700,4	$\overset{7}{B}_{19}$ = 745,2	$\overset{8}{B}_{18}$ = 562	$\overset{9}{B}_{21}$ = 899,2	${}_{1}\overset{3}{C}$ = 18	${}_{11}\overset{9}{C}$ = 27,2
$\overset{4}{B}_{25}$ = 2 698,8	$\overset{6}{B}_{18}$ = 831,6	$\overset{7}{B}_{20}$ = 884	$\overset{8}{B}_{19}$ = 684	$\overset{9}{B}_{22}$ = 1 052,4	${}_{1}\overset{4}{C}$ = 36	${}_{12}\overset{7}{C}$ = 109,6
$\overset{4}{B}_{26}$ = 2 954,4	$\overset{6}{B}_{19}$ = 974,8	$\overset{7}{B}_{21}$ = 1 034,8	$\overset{8}{B}_{20}$ = 818	$\overset{9}{B}_{23}$ = 1 217,6	${}_{1}\overset{5}{C}$ = 118	${}_{12}\overset{8}{C}$ = 82
$\overset{4}{B}_{27}$ = 3 222	$\overset{6}{B}_{20}$ = 1 130	$\overset{7}{B}_{22}$ = 1 197,6	$\overset{8}{B}_{21}$ = 964	$\overset{9}{B}_{24}$ = 1 394,8	${}_{1}\overset{6}{C}$ = 190	${}_{12}\overset{9}{C}$ = 60,4
$\overset{4}{B}_{28}$ = 3 501,6	$\overset{6}{B}_{21}$ = 1 297,2	$\overset{7}{B}_{23}$ = 1 372,4	$\overset{8}{B}_{22}$ = 1 122	$\overset{9}{B}_{25}$ = 1 584	${}_{1}\overset{7}{C}$ = 304,8	${}_{13}\overset{7}{C}$ = 164,4
$\overset{5}{B}_{16}$ = 725,2	$\overset{6}{B}_{22}$ = 1 476,4	$\overset{7}{B}_{24}$ = 1 559,2	$\overset{8}{B}_{23}$ = 1 292	$\overset{9}{B}_{26}$ = 1 785,2	${}_{1}\overset{8}{C}$ = 344,4	${}_{13}\overset{8}{C}$ = 132
$\overset{5}{B}_{17}$ = 856,4	$\overset{6}{B}_{23}$ = 1 667,6	$\overset{7}{B}_{25}$ = 1 758	$\overset{8}{B}_{24}$ = 1 474	$\overset{10}{B}_{1}$ = 441,6	${}_{1}\overset{9}{C}$ = 390	${}_{13}\overset{9}{C}$ = 105,6
$\overset{5}{B}_{18}$ = 999,6	$\overset{6}{B}_{24}$ = 1 870,8	$\overset{7}{B}_{26}$ = 1 968,8	$\overset{8}{B}_{25}$ = 1 668	$\overset{10}{B}_{20}$ = 704	${}_{1}\overset{10}{C}$ = 441,6	${}_{14}\overset{7}{C}$ = 231,2
$\overset{5}{B}_{19}$ = 1 154,8	$\overset{6}{B}_{25}$ = 2 086	$\overset{7}{B}_{27}$ = 2 191,6	$\overset{8}{B}_{26}$ = 1 874	$\overset{10}{B}_{21}$ = 840,4	${}_{1}\overset{11}{C}$ = 638,4	${}_{14}\overset{8}{C}$ = 194
$\overset{5}{B}_{20}$ = 1 322	$\overset{6}{B}_{26}$ = 2 313,2	$\overset{7}{B}_{28}$ = 2 426,4	$\overset{8}{B}_{27}$ = 2 092	$\overset{10}{B}_{22}$ = 988,8	${}_{4}\overset{8}{C}$ = 122,4	${}_{14}\overset{9}{C}$ = 162,8
$\overset{5}{B}_{21}$ = 1 501,2	$\overset{6}{B}_{27}$ = 2 552,4	$\overset{8}{B}_{1}$ = 344,4	$\overset{9}{B}_{1}$ = 390	$\overset{10}{B}_{23}$ = 1 149,2	${}_{5}\overset{8}{C}$ = 60,4	${}_{14}\overset{10}{C}$ = 137,6
$\overset{5}{B}_{22}$ = 1 692,4	$\overset{6}{B}_{28}$ = 2 803,6	$\overset{8}{B}_{2}$ = 264,4	$\overset{9}{B}_{2}$ = 304	$\overset{10}{B}_{24}$ = 1 321,6	${}_{5}\overset{9}{C}$ = 82	${}_{15}\overset{8}{C}$ = 268
$\overset{5}{B}_{23}$ = 1 895,6	$\overset{7}{B}_{1}$ = 304,8	$\overset{8}{B}_{3}$ = 190,4	$\overset{9}{B}_{3}$ = 224	$\overset{11}{B}_{23}$ = 936	${}_{6}\overset{8}{C}$ = 27,2	${}_{15}\overset{9}{C}$ = 232
$\overset{5}{B}_{24}$ = 2 110,8	$\overset{7}{B}_{2}$ = 230,8	$\overset{8}{B}_{5}$ = 60,4	$\overset{9}{B}_{5}$ = 82	$\overset{11}{B}_{24}$ = 1 092	${}_{7}\overset{8}{C}$ = 6	${}_{16}\overset{9}{C}$ = 313,2
$\overset{5}{B}_{25}$ = 2 338	$\overset{7}{B}_{13}$ = 164,4	$\overset{8}{B}_{11}$ = 44	$\overset{9}{B}_{13}$ = 105,6			
$\overset{5}{B}_{26}$ = 2 577,2		$\overset{8}{B}_{12}$ = 82	$\overset{9}{B}_{18}$ = 511,6			

TABLEAU V

Convoi formé d'une file de tombereaux de 6 tonnes.

VÉHICULES	ÉLÉMENTS DU CONVOI				CONSTANTES DU CONVOI		
	NUMÉROS des charges n	INTENSITÉS des charges P_n	DISTANCES à la charge P_o a_n	ESPACEMENTS des charges $a_n - a_{n-1}$	NUMÉROS des charges n	SOMMES des intensités des charges A_n	SOMMES des moments des charges par rapport à la charge P_o B_n
		t.	m.	m.		t.	tm.
1/2 tombereau.	0	3	0,00		0	3	0
Cheval	1	0,7	2,75	2,75	1	3,7	1,925
Cheval	2	0,7	5,25	2,50	2	4,4	5,6
Tombereau	3	6	8	2,75	3	10,4	53,6
Cheval	4	0,7	10,75	2,75	4	11,1	61,125
Cheval	5	0,7	13,25	2,50	5	11,8	70,4
Tombereau	6	6	16	2.75	6	17,8	166,4
Cheval	7	0,7	18,75	2,75	7	18,5	179,525
Cheval	8	0,7	21,25	2,50	8	19,2	194,4
Tombereau	9	6	24	2,75	9	25,2	338,4
Cheval	10	0,7	26,75	2,75	10	25,9	357,125

Cheval	11	0,7	29,25	2,50	11	26,6	377,6
Tombereau	12	6	32	2,75	12	32,6	569,6
Cheval	13	0,7	34,75	2,75	13	33,3	593,925
Cheval	14	0,7	37,25	2,50	14	34	620
Tombereau	15	6	40	2,75	15	40	860
Cheval	16	0,7	42,75	2,75	16	40,7	889,925
Cheval	17	0,7	45,25	2,50	17	41,4	921,6
Tombereau	18	6	48	2,75	18	47,4	1 209,6
Cheval	19	0,7	50,75	2,75	19	48,1	1 245,125
Cheval	20	0,7	53,25	2,50	20	48,8	1 282,4
Tombereau	21	6	56	2,75	21	54,8	1 618,4
Cheval	22	0,7	58,75	2,75	22	55,5	1 659,525
Cheval	23	0,7	61,25	2,50	23	56,2	1 702,4
Tombereau	24	6	64	2,75	24	62,2	2 086,4
Cheval	25	0,7	66,75	2,75	25	62,9	2 133,125
Cheval	26	0,7	69,25	2,50	26	63,6	2 181,6
Tombereau	27	6	72	2,75	27	69,6	2 613,6
Cheval	28	0,7	74,75	2,75	28	70,3	2 665,925
Cheval	29	0,7	77,25	2,50	29	71	2 720
Tombereau	30	6	80	2,75	30	77	3 200

TABLEAU VI

Convoi formé d'une file de chariots de 16 tonnes.

	ÉLÉMENTS DU CONVOI				CONSTANTES DU CONVOI		
VÉHICULES	NUMÉROS des charges n	INTENSITÉS des charges P_n	DISTANCES à la charge P_0 a_n	ESPACEMENTS des charges $a_n - a_{n-1}$	NUMÉROS des charges n	SOMMES des intensités des charges A_n	SOMMES des moments des charges par rapport à la charge P_0 B_n
		t.	m.	m.		t.	tm.
Chariot.	0	8	0,00		0	8	0
				3			
	1	8	3		1	16	24
				2,75			
8 chevaux	2	1,4	5,75		2	17,4	32,05
				2,50			
	3	1,4	8,25		3	18,8	43,6
				2,50			
	4	1,4	10,75		4	20,2	58,65
				2,50			
	5	1,4	13,25		5	21,6	77,2
				2,75			
Chariot.	6	8	16		6	29,6	205,2
				3			
	7	8	19		7	37,6	357,2
				2,75			
8 chevaux.	8	1,4	21,75		8	39	387,65
				2,50			
	9	1,4	24,25		9	40,4	421,6
				2,50			

				2,50			
Chariot.	11	1,4	29,25	2,75	11	43,2	500
	12	8	32	3	12	51,2	756
	13	8	35	2,75	13	59,2	1 036
8 chevaux.	14	1,4	37,75	2,50	14	60,6	1 088,85
	15	1,4	40,25	2,50	15	62	1 145,2
	16	1,4	42,75	2,50	16	63,4	1 205,05
	17	1,4	45,25	2,75	17	64,8	1 268,4
Chariot.	18	8	48	3	18	72,8	1 652,4
	19	8	51	2,75	19	80,8	2 060,4
8 chevaux.	20	1,4	53,75	2,50	20	82,2	2 135,65
	21	1,4	56,25	2,50	21	83,6	2 214,4
	22	1,4	58,75	2,50	22	85	2 296,65
	23	1,4	61,25	2,75	23	86,4	2 382,4
Chariot.	24	8	64	3	24	94,4	2 894,4
	25	8	67	2,75	25	102,4	3 430,4
8 chevaux.	26	1,4	69,75	2,50	26	103,8	3 528,05
	27	1,4	72,25	2,50	27	105,2	3 629,2
	28	1,4	74,75	2,50	28	106,6	3 733,85
	29	1,4	77,25	2,75	29	108	3 842
Chariot.	30	8	80		30	116	4 482

TABLEAU VII

Convoi formé d'une file de chariots de 16 tonnes.

VÉHICULES	ÉLÉMENTS DU CONVOI				CONSTANTES DU CONVOI		
	NUMÉROS des charges i	INTENSITÉS des charges P_i	DISTANCES à la charge P_o a_i	ESPACEMENTS des charges $a_i - a_{i-1}$	NUMÉROS des charges i	SOMMES des intensités des charges A_i	SOMMES des moments des charges par rapport à la charge P_o B_i
		t.	m.	m.		t.	tm.
	0	0	0,00		0	0,0	0
8 chevaux	1	1,4	2,75	2,75	1	1,4	3,85
	2	1,4	5,25	2,50	2	2,8	11,2
	3	1,4	7,75	2,50	3	4,2	22,05
	4	1,4	10,25	2,50	4	5,6	36,4
Chariot	5	8	13	2,75	5	13,6	140,4
	6	8	16	3	6	21,6	268,4
8 chevaux	7	1,4	18,75	2,75	7	23	294,65
	8	1,4	21,25	2,50	8	24,4	324,4
	9	1,4	23,75	2,50	9	25,8	357,65
	10	1,4	26,25	2,50	10	27,2	394,4
				2,75			

Chariot.	11	8	29	3	11	35,2	626,4
	12	8	32	2,75	12	43,2	882,4
8 chevaux. . . .	13	1,4	34,75	2,50	13	44,6	931,05
	14	1,4	37,25	2,50	14	46	983,2
	15	1,4	39,75	2,50	15	47,4	1 038,85
	16	1,4	42,25	2,75	16	48,8	1 098
Chariot.	17	8	45	3	17	56,8	1 458
	18	8	48	2,75	18	64,8	1 842
8 chevaux.	19	1,4	50,75	2,50	19	66,2	1 913,05
	20	1,4	53,25	2,50	20	67,6	1 987,6
	21	1,4	55,75	2,50	21	69	2 065; 65
	22	1,4	58,25	2,75	22	70,4	2 147. 2
Chariot.	23	8	61	3	23	78,4	2 635,2
	24	8	64	2,75	24	86,4	3 147,2
8 chevaux.	25	1,4	66,75	2,50	25	87,8	3 240,65
	26	1,4	69,25	2,50	26	89,2	3 337,6
	27	1,4	71,75	2,50	27	90,6	3 438,05
	28	1,4	74,25	2,75	28	92	3 542
Chariot.	29	8	77	3	29	100	4 158
	30	8	80		30	108	4 798

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE IV

DEUXIÈME PARTIE

Applications aux surcharges du Règlement du 29 Août 1891 sur les Ponts métalliques.

CHAPITRE PREMIER

CHAPITRE II

ÉVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY



8907854215б
b89078542156a